MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Classes de première (série S)

Zone : Afrique occidentale

Mercredi 13 mars

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses trois côtés sont des entiers naturels non nuls.
On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. *a.* Parmi les triplets (x, y, z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

(4, 4, 5) ; (3, 6, 9) ; (2, 2, 6)

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant (soit : $z \geq 19$) ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p.
Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1,4,4), (2,3,4), (3,3,3)\}$.
a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?
b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. *a.* Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $\boldsymbol{E_{2\,019}}$.
a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?
b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?
c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle rectangle alors
$2\,019^2 = 4\,038\,(x + y) - 2xy$.
En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.

a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Établir que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2\,022}.$$

c. Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x, y) telles que $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle ? En déterminer l'aire $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone $\boldsymbol{P}$ est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\boldsymbol{P}$ et j le nombre de ceux situés sur les côtés de $\boldsymbol{P}$. »

En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.
De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Premières fois

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas. On rappelle le théorème de décomposition *en produit de facteurs premiers :*

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique entier naturel k, une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$\boldsymbol{n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$).
La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels

On souhaite si possible déterminer une fonction $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :
Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$;
Propriété (2) : Pour tout nombre premier p, $\Delta(p) = 1$;
Propriété (3) : Pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.

On suppose dans les questions **1**, **2** et **3** qu'une telle fonction Δ existe.

1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$?
Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par Δ de p^n ?

2. *a.* Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?

b. Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geq 1$?

3. À tout nombre entier $n \geq 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1, q_2 de n par p_2,... , q_k quotient de n par p_k. Montrer qu'alors :

$$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$$

4. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus. Cette expression, alliée à la convention portée dans la propriété (1), définit donc une unique fonction Δ convenable.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.

5. *a.* Calculer $\Delta(12), \Delta(56), \Delta(1\,001)$.

b. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?

c. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?

d. Tout entier naturel m a-t-il au moins un antécédent par Δ ?

e. Est-il vrai que, pour tout entier naturel n, $\Delta(n) \leq n$?

6. *a.* Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.

b. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

7. *a.* Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k. Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction Δ

8. *a.* Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p. Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p.

b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On suppose que $\alpha \geq 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.

9. Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.

Olympiades nationales de mathématiques 2019

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Agence pour l'enseignement français à l'étranger

Seconde partie de l'épreuve

Exercices académiques

Classes de première (série S)

Zone : Afrique occidentale

Mercredi 13 mars

Les calculatrices sont autorisées.

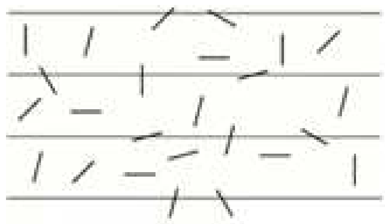
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde partie de l'épreuve

Exercice académique numéro 1

Jeu d'aiguilles



On s'intéresse, dans cet exercice, à l'expérience qui consiste à jeter au hasard un grand nombre de fois une aiguille sur un parquet composé de planches parallèles. On admettra qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

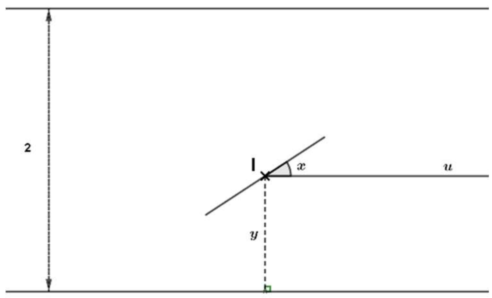
- L'unité de longueur choisie dans cet exercice est celle de l'aiguille.
- Toutes les planches du parquet ont pour largeur 2 unités.

L'objectif de l'exercice est d'estimer la probabilité p de l'événement C : « l'aiguille tombe à cheval sur une rainure du parquet ».

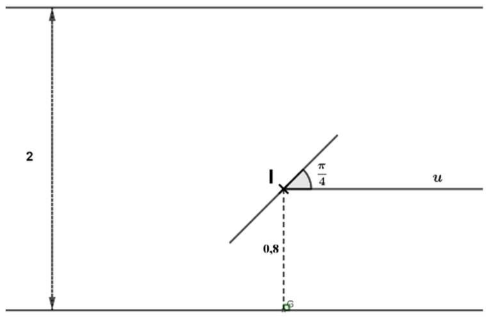
Modélisation

Les rainures du parquet sont assimilées à des droites parallèles et l'aiguille à un segment de **longueur 1**.

La position de l'aiguille sur une planche donnée est repérée par son milieu I et un couple $(x\,;y)$ de coordonnées définies de la façon suivante :



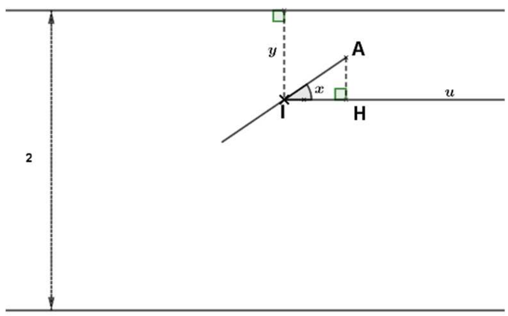
- x est la mesure exprimée en radian comprise entre 0 et π de l'angle formé par l'aiguille et la demi-droite $[\mathrm{I}\,;u)$ parallèle aux rainures du parquet (*voir figure ci-contre*) ;
- y est la distance entre le point I et la rainure du parquet la plus proche de l'aiguille ($y \in [0\,;1]$).



Ainsi, dans l'exemple ci-contre, l'aiguille est repérée par le point $\mathrm{I}\left(\frac{\pi}{4};0{,}8\right)$.

1. On considère quatre positions de l'aiguille correspondant aux points P, Q, R et S suivants : $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2};0{,}4\right)$; $\mathrm{Q}\left(\frac{\pi}{3}\,;0{,}5\right)$; $\mathrm{R}\left(\frac{3\pi}{4}\,;0{,}2\right)$; $\mathrm{S}\left(\frac{5\pi}{6}\,;0{,}9\right)$

   Pour chacune de ces situations, indiquer, en le justifiant, si l'événement C est réalisé ou non.



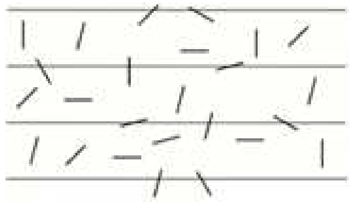
2. Soit I un point de coordonnées $(x\,;y)$. I correspond à la position de l'aiguille représentée ci-contre.

   a. Exprimer la distance AH en fonction de x.

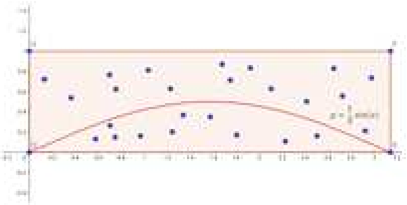
   b. En déduire que l'événement C est réalisé si et seulement si :

$$y < \frac{1}{2}\sin(x)$$

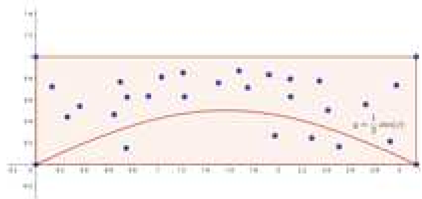
3. Dans cette question, on considère la configuration ci-contre présentant le résultat de l’expérience aléatoire consistant à jeter 25 fois une aiguille sur un parquet à planches parallèles.



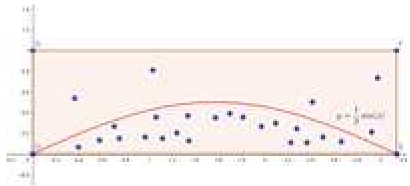
Sur chacun des graphiques ci-dessous est représentée la courbe d’équation $y = \frac{1}{2}\sin(x)$, pour x compris entre 0 et π. Les points correspondant aux positions des 25 aiguilles présentées ci-dessus figurent sur un seul de ces graphiques. Quel est celui qui correspond à cette situation ? Justifier.



Graphique 1



Graphique 2



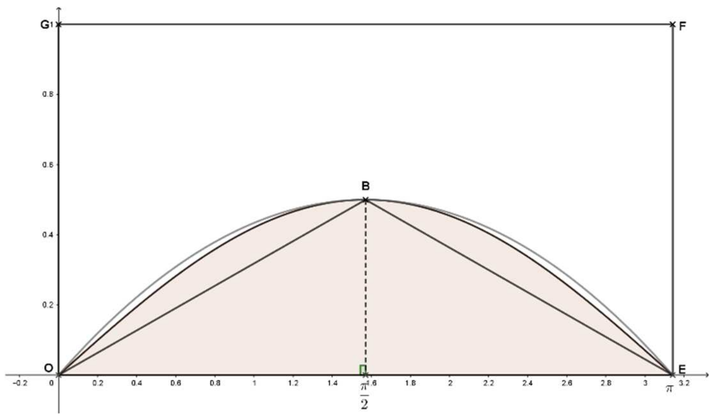
Graphique 3

4. On considère l’algorithme ci-dessous :

$k \leftarrow 0$
  Pour i allant de 1 à n
    $x \leftarrow$ valeur aléatoire dans $[0\,;\,\pi]$
    $y \leftarrow$ valeur aléatoire dans $[0\,;\,1]$
    Si $y < \frac{1}{2}\sin(x)$
      $k \leftarrow k + 1$
    Fin Si
  Fin Pour
$f \leftarrow k/n$

Lorsque l’on exécute cet algorithme pour $n = 10\,000$, la variable f contient 3 152. Quelle interprétation peut-on en donner ?

5. Dans un repère orthogonal donné, on considère le domaine du plan représenté ci-dessous (partie colorée), délimité par la courbe d’équation $y = \frac{1}{2}\sin(x)$, l’axe des abscisses et les droites d’équation $x = 0$ et $x = \pi$ (partie colorée). On considère également le rectangle OEFG où $\mathrm{O}(0\,;0)$, $\mathrm{E}(\pi\,;0)$, $\mathrm{F}(\pi\,;1)$ et $\mathrm{G}(0\,;1)$.



La probabilité de l’événement C est égale au quotient de l’aire de ce domaine par l’aire du rectangle OEFG.

D’après la formule d’Archimède, l’aire du domaine situé sous l’arc de parabole représenté ci-contre passant par O, B et E est égal aux quatre tiers de l’aire du triangle OBE.

En déduire un encadrement de la probabilité de l’événement C.

Exercice académique numéro 2

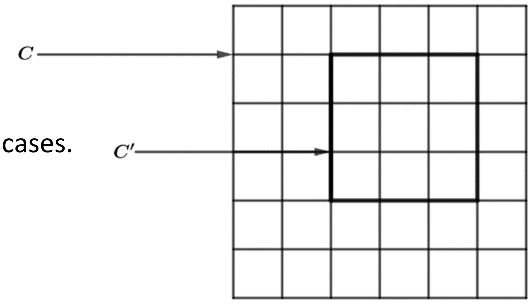
Des carrés et des cases

Pour répondre aux questions de cet exercice, on pourra, si besoin, colorier les cases des carrés figurant en annexe (à rendre avec la copie).

Définition : dans un carré C composé de $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ cases, on appelle **sous-carré** $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}$ de C tout carré composé de $m \times m$ cases contenu dans C.

Exemple :

C' est un sous-carré 3×3 du carré C composé de 6×6 cases.



A. Un cas particulier

On considère, dans cette partie, un **carré $\boldsymbol{C}$ composé de $\mathbf{5} \times \mathbf{5}$** cases et C' **un sous-carré $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$** du carré C.

1. Combien existe-t-il de positions possibles de C' dans le carré C ?
2. Disposer une case noire (ou plusieurs) dans le carré C figurant en annexe pour que **chaque** sous-carré C' contienne exactement une case noire.
3. Disposer des cases noires dans le carré C figurant en annexe pour que **chaque** sous-carré C' contienne exactement :
   a. deux cases noires ;
   b. trois cases noires ;
   c. quatre cases noires.
4. Montrer que si l'on peut disposer des cases noires dans le carré C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement p cases noires, on pourra placer des cases noires dans le carré C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement $9 - p$ cases noires.
5. Que peut-on en conclure quant au nombre de cases noires qui peuvent être contenues dans chaque sous-carré C' d'un carré C ?

B. Généralisation

On considère dans cette partie, pour tout entier naturel k tel que $k \geq 2$:

- **un carré $\boldsymbol{C}$ composé de $(\mathbf{2}\boldsymbol{k} + \mathbf{1}) \times (\mathbf{2}\boldsymbol{k} + \mathbf{1})$ cases ;**
- **un sous-carré $(\mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1}) \times (\mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1})$ du carré $\boldsymbol{C}$, noté $\boldsymbol{C}'$.**

1. Combien existe-t-il de positions possibles de C' dans C ?
2. Justifier que, si p est un entier naturel tel que $p \leq (2k-3)^2$, on peut disposer des cases noires dans C de telle façon que tout sous-carré C' contienne exactement p cases noires.
3. En déduire que, si p est un entier naturel tel que $p \leq (2k-3)^2$, on pourra placer des cases noires dans C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement $(2k-1)^2 - p$ cases noires.

On souhaite démontrer dans cette partie que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{p}$ tel que $\boldsymbol{p} \leq (\mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}$, on peut disposer des cases noires dans $\boldsymbol{C}$ de telle façon que tout sous-carré $\boldsymbol{C}'$ contienne exactement $\boldsymbol{p}$ cases noires.

4. Cette propriété est-elle vraie pour $k = 2$? Pour $k = 3$?
5. Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $k \geq 4$: $(2k-1)^2 - (2k-3)^2 \leq (2k-3)^2$.
6. Conclure.

Exercice académique numéro 2 (*des carrés et des cases) :* annexe