Éléments de correction

Exercice académique numéro 1

Jeu d'aiguilles

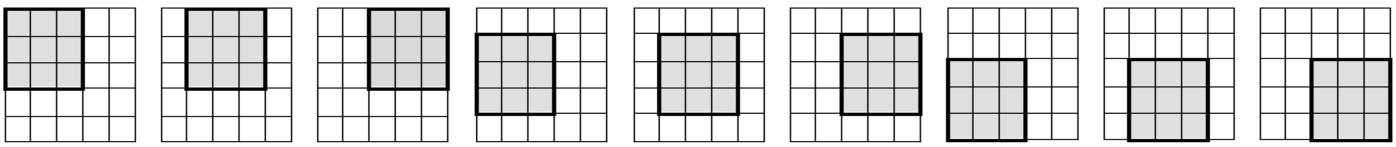
1. L'aiguille correspondant au point P vérifie C car $0{,}5 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5 > 0{,}4$. Avec un raisonnement analogue, les aiguilles correspondant aux points Q et S ne vérifient pas C, et celle du point R vérifie C.
2. a. $\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\sin(x)$
   b. L'événement C est réalisé si et seulement si $y < \mathrm{AH}$
3. Elle correspond au premier schéma car il y a 10 points sur 25 en dessous de la courbe d'équation
$$y = \frac{1}{2}\sin(x)$$
4. L'algorithme génère aléatoirement n points dans le rectangle OEFG et calcule la fréquence de ceux qui sont en dessous de la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}\sin(x)$.
5. L'aire du triangle OBE est $\frac{1}{2}.\mathrm{OE}.\mathrm{BH} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\pi = \frac{\pi}{4}$ et donc l'aire sous l'arc de parabole en pointillés passant par O, B et E est $\frac{4}{3}.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$.
   On a donc $\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} < P(C) < \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi}$. C'est-à-dire $\frac{1}{4} < P(C) < \frac{1}{3}$.

Exercice académique numéro 2

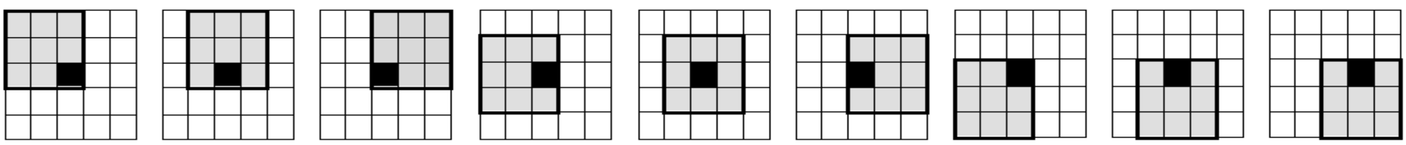
Des carrés et des cases

Partie A : on considère dans cette partie un carré $\mathcal{C}$ de 5×5 cases et $\mathcal{C}'$ un sous-carré 3×3 du carré $\mathcal{C}$.

1. Il existe 9 positions possibles de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$:

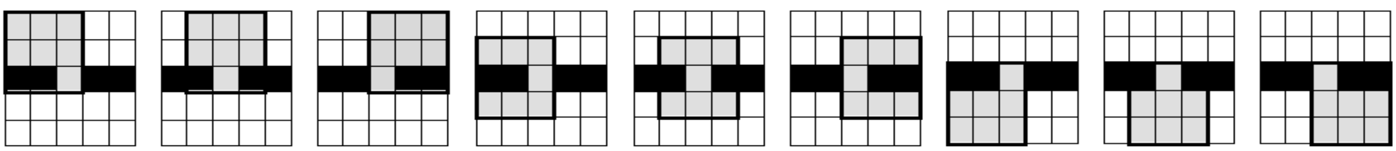


2. On peut placer une case noire au centre de $\mathcal{C}$:

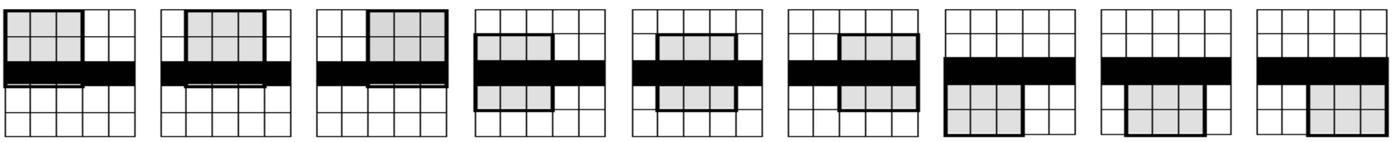


3. La réponse est oui aux trois questions :

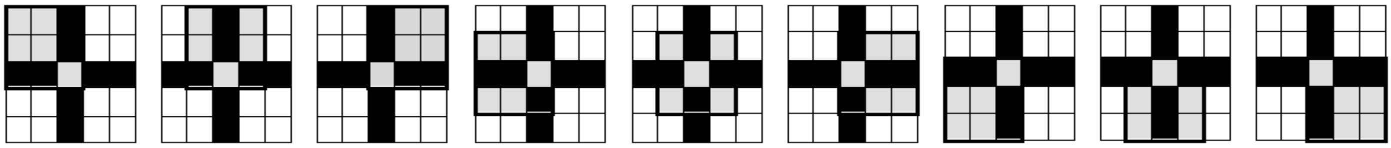
a.



b.



c.



4. Si l'on peut disposer des cases noires dans $\mathcal{C}$ pour que chaque sous-carré contienne exactement p cases noires alors chaque sous-carré contiendra $9-p$ cases blanches. En échangeant la couleur de chacune des cases de $\mathcal{C}$, on obtiendra que chaque sous-carré contiendra $9-p$ cases noires.
5. On a vu à l'aide des questions 2. et 3. que l'on pouvait disposer des cases noires dans $\mathcal{C}$ pour que chaque sous-carré contienne p cases noires avec $p = 1, 2, 3$ ou 4. Le cas où $p = 0$ est trivial. Par la question 4. on obtient le résultat pour $p = 5, 6, 7, 8$ ou 9.

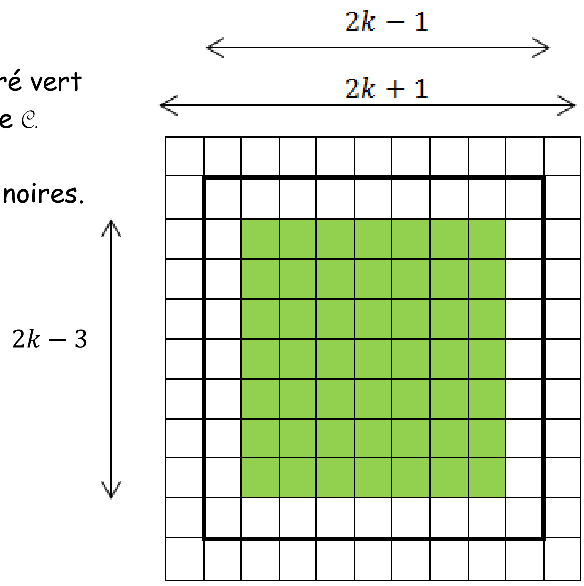
Partie B : on généralise dans cette partie le résultat obtenu dans la partie A aux carrés de côtés impairs.

On considère dans cette partie un carré $\mathcal{C}$ de $(2k+1) \times (2k+1)$ cases et $\mathcal{C}'$ un sous-carré $(2k-1) \times (2k-1)$ du carré $\mathcal{C}$, où k est un entier naturel tel que $k \geq 2$.

1. Il existe aussi 9 positions possibles de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$. Voir la question 1. de la partie A.

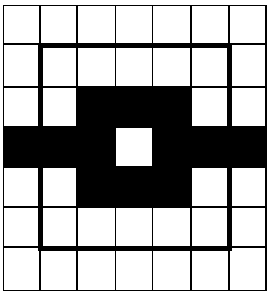
2. Tout ensemble de cases noires contenues dans le carré vert ci-contre sera contenu dans tous les sous-carrés $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$.

   Cet ensemble pourra contenir jusqu'à $(2k-3)^2$ cases noires.

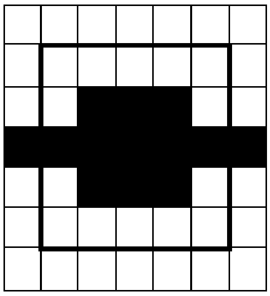


3. Si l'on peut disposer des cases noires dans $\mathcal{C}$ pour que chaque sous-carré contienne exactement p cases noires alors chaque sous-carré contiendra $(2k-1)^2 - p$ cases blanches. En échangeant la couleur de chacune des cases de $\mathcal{C}$, on obtiendra que chaque sous-carré contiendra $(2k-1)^2 - p$ cases noires.

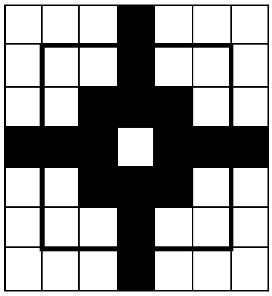
4.
   - Si $k = 2$ situation traitée dans la première partie de l'exercice.
   - Si $k = 3$, les réponses aux questions 2. et 3. impliquent que l'on pourra disposer des cases noires de telle façon que chaque sous-carré contiendra p cases noires dans le cas où $p \in [0\,;9] \cup [16\,;25]$. Il suffit de vérifier les cas où $p = 10, 11$ ou 12. Les cas $p = 15, 14$ ou 13 seront alors obtenus par passage aux couleurs complémentaires (question 3.). Or les dispositions suivantes :



$p = 10$



$p = 11$



$p = 12$

nous permettent de conclure pour $k = 3$.

On peut donc conclure : dans un carré de $(2k+1) \times (2k+1)$ cases on peut disposer des cases noires pour que tout sous-carré de $(2k-1) \times (2k-1)$ cases puisse contenir p cases noires avec : $0 \leq p \leq (2k-1)^2$.

5. $(2k-1)^2 - (2k-3)^2 \leq (2k-3)^2 \iff \cdots \iff 0 \leq 4k^2 - 20k + 17$ ce qui est vérifié pour $k > 3$.
6. Nous venons de voir (question 2) que si $0 \leq p \leq (2k-3)^2$ alors on pourra disposer des cases noires de telle façon que chaque sous-carré contiendra p cases noires. De même (question 3.) on pourra disposer des cases noires de telle façon que chaque sous-carré contiendra $(2k-1)^2 - p$ cases noires, avec $0 \leq p \leq (2k-3)^2$. Nous venons de montrer que $(2k-1)^2 - (2k-3)^2 \leq (2k-3)^2$ dans le cas où $k \neq 2$ et $k \neq 3$, ce qui montre le résultat pour $0 \leq p \leq (2k-1)^2$.