ACADÉMIE
DE MONTPELLIER

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Deuxième partie : Exercices académiques

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 (*Rectangles et formats*) et 2 (*Rendez la monnaie !*).
- **Tous les autres candidats** (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques 1 (*Rectangles et formats*) et 3 (*Nombres de Niven*).

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Animath CASIO Inria inventeurs du monde numérique TEXAS INSTRUMENTS Crédit Mutuel Enseignant

Exercice 1 (tous les candidats)

Rectangles et formats

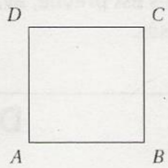
On définit le ***rapport*** d'un rectangle comme le quotient de sa longueur par sa largeur. Ainsi, un rectangle de longueur L et de largeur l, avec $L \geq l > 0$, a pour rapport le nombre r vérifiant : $r = \frac{L}{l}$.

Partie I : Trois rectangles de la vie courante

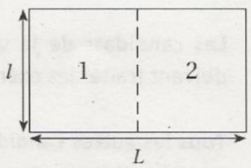
1. Le nouveau format des pièces d'identité est celui d'une carte de crédit, qui est un rectangle de rapport $\frac{17}{11}$.
Sa longueur mesure 85 millimètres. Quelle est sa largeur en millimètres ?

2. Certains écrans de télévision actuels sont des rectangles de rapport $\frac{16}{9}$ (communément noté 16/9).
Sachant qu'un pouce vaut 2,54 cm, déterminer la longueur et la largeur d'un écran de télévision de diagonale 43 pouces, arrondies à 0,01 cm.

Partie II : Les rectangles de rapport $\sqrt{2}$



1. On considère un carré $ABCD$ de côté 1.
Reproduire ce carré sur la copie en prenant pour unité 8 cm.
Construire le point E de la demi-droite $[AB)$ tel que $AE = AC$ et le point F tel que $AEFD$ est un rectangle. Démontrer que le rapport de ce rectangle vaut $\sqrt{2}$.



2. On considère un rectangle de rapport $\sqrt{2}$, de largeur l et de longueur L.
On découpe ce rectangle en deux rectangles identiques parallèlement à la largeur, de la manière ci-contre. Démontrer que les deux rectangles obtenus sont aussi des rectangles de rapport $\sqrt{2}$.

Partie III : Aires des rectangles de type A

Afin de faciliter la taxation du papier, le mathématicien, physicien et homme politique Lazare Carnot a proposé, en 1786, l'usage d'un format pratique : le format A_0, **rectangle de rapport $\sqrt{2}$ dont l'aire est 1 m^2.** On crée à partir du format A_0 les formats A_1, A_2, A_3 ... de la façon suivante : pour un entier naturel k, on obtient le format A_{k+1} en coupant en deux la feuille A_k parallèlement à sa largeur (ainsi que fait dans la question **2.** ci-dessus).
On appellera dans la suite de ce problème de tels rectangles des *rectangles de type A*.

1. Exprimer en m^2 et en fonction de k l'aire du rectangle de format A_k.

2. Des représentations, qui ne sont pas en vraies grandeurs, des rectangles de formats A_0, A_1, A_2, ..., A_8 sont fournies en annexe. Découper puis coller sur votre copie le rectangle de format A_0.
Peut-on placer tous les rectangles de format A_1, A_2, ..., A_8 à l'intérieur de ce rectangle sans qu'aucun rectangle ne se chevauche ? Si oui, réaliser la construction en collant ces rectangles à l'intérieur du rectangle de format A_0.

3. Des élèves conjecturent alors que la somme des aires de toutes les feuilles de format A_k, lorsque k parcourt l'ensemble des entiers naturels, vaut 2 m^2.
À l'aide d'arguments géométriques, expliquer le raisonnement de ces élèves.

Partie IV : Périmètres des rectangles de type A

On admet que la somme des aires de toutes les feuilles de format A_k, lorsque k parcourt l'ensemble des entiers naturels, vaut 2 m^2.
Soit k un nombre entier naturel. On note L_k la longueur du rectangle de format A_k et l_k sa largeur. Ainsi, L_0 est la longueur du rectangle de format A_0 et l_0 sa largeur. On rappelle que l'aire du rectangle A_0 est de $1m^2$.

1. Démontrer que $L_0 \approx 1189$ mm et que $l_0 \approx 841$ mm.

2. Exprimer, en fonction de k et de L_0, la longueur L_k et la largeur l_k d'un rectangle de format A_k. En déduire le périmètre de la feuille de format A_k. On pourra considérer que $L_0 = 1189$.

3. Déterminer, en détaillant la méthode employée, le plus petit entier naturel n tel que le périmètre de la feuille de format A_n soit strictement inférieur à 1mm.

4. A l'aide de la question III 3), calculer la somme de tous les périmètres des feuilles de format A_k.

Animath Association pour l'animation mathématique CASIO Inria inventeurs du monde numérique Texas Instruments Crédit Mutuel Enseignant

Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Rendez la monnaie !

Ce problème étudie certains cas particuliers de paiement dans une monnaie fictive, le *zeuro*, pour laquelle on trouve des pièces de n'importe quelle valeur entière strictement positive. Il existe ainsi des pièces de 1 *zeuro*, de 2 *zeuros*, de 3 zeuros, de 4 *zeuros*, etc.

Soit n un entier strictement positif. On considère un porte-monnaie contenant n pièces dont les valeurs sont notées $a_1, \dots, a_n$, avec $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. On appelle ***capacité*** de ce porte-monnaie le plus grand entier M tel que l'on puisse payer **sans rendu de monnaie** toute somme entière comprise entre 1 et M.

On note $(a_1, \dots, a_n)$ le porte-monnaie contenant les pièces de valeurs $a_1, \dots, a_n$ et $C(a_1, \dots, a_n)$ sa capacité.

Par exemple, le porte-monnaie $(1,2,5)$ a une **capacité égale à 3**, autrement dit : $C(1,2,5) = 3$. En effet, avec ce porte-monnaie, on peut payer une somme égale à 1 *zeuro* (avec la pièce de 1 *zeuro*), une somme de 2 *zeuros* (avec la pièce de cette valeur), une somme de 3 *zeuros* (avec les pièces de 1 *zeuro* et 2 *zeuros*), mais on ne peut pas payer de somme égale à 4 *zeuros*.

Partie 1 : sans rendu de monnaie

1. Expliquer pourquoi, avec le porte-monnaie $(1,2,5)$, on ne peut pas payer, sans rendu de monnaie, de somme égale à 4 *zeuros*.
2. **a.** Expliquer pourquoi $C(1,3,4) = 1$.
   b. Déterminer en justifiant la capacité $C(1,2,4)$.
   c. Donner sans justifier les capacités $C(1,2,2,5,12)$ et $C(1,2,4,8,16)$.
3. Expliquez pourquoi on ne peut pas parler de capacité d'un porte-monnaie qui n'aurait pas au moins une pièce de 1 *zeuro*.

Pour toute la suite de l'exercice, on supposera que : $a_1 = 1$ *et* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.

4. Déterminer les entiers a et b avec $1 \leq a \leq b$ pour lesquels la capacité $C(1, a, b)$ est la plus grande possible.
5. Soit j un entier compris entre 1 et $n-1$. On note $M = C(a_1, \dots, a_j)$ et $M' = C(a_1, \dots, a_{j+1})$.
   a. Exprimer M' en fonction de M dans le cas où $a_{j+1} > M + 1$.
   b. On suppose cette fois $a_{j+1} \leq M + 1$. Montrer que $M' = M + a_{j+1}$.
   c. En déduire un algorithme permettant de calculer $C(a_1, \dots, a_n)$.
6. Déterminer la capacité maximale que peut avoir un porte-monnaie contenant 5 pièces.
7. Donner sans justifier la capacité maximale d'un porte-monnaie composé de n pièces.

Partie 2 : avec rendu de monnaie

Un client ayant un porte-monnaie $(a_1, \dots, a_n)$ va faire ses courses chez un marchand qui possède un porte-monnaie $(b_1, \dots, b_p)$ de p pièces, lui permettant de rendre la monnaie. Nommons ***capacité commune*** le plus grand entier M tel que l'on puisse payer toute somme entière comprise entre 1 et M, en incluant si nécessaire un rendu de monnaie. On note cette capacité commune $C\left((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_p)\right)$.

Par exemple, si l'acheteur a le porte-monnaie $(1,2,5)$ et le marchand a le porte-monnaie $(1,2)$, l'acheteur peut payer les sommes égales à 1 *zeuro*, 2 *zeuros* et 3 *zeuros* sans que le vendeur n'ait à rendre de monnaie. L'acheteur peut maintenant payer une somme égale de 4 *zeuros* : il suffit que le client donne sa pièce de 5 *zeuros* et que le marchand lui rende sa pièce de 1 *zeuro*.

1. Déterminer en justifiant les capacités communes $C\left((1,2,5),(1,2)\right)$ puis $C\left((8,16),(1,2,4)\right)$.
2. Soit p un entier strictement positif. En notant $M = C(b_1, \dots, b_p)$, déterminer la capacité commune suivante : $C\left((M+1, 2(M+1), 4(M+1), 8(M+1), 16(M+1)), (b_1, \dots, b_p)\right)$

Animath Association pour l'animation mathématique
CASIO
Inria inventeurs du monde numérique
Texas Instruments
Crédit Mutuel Enseignant

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Nombres de Niven

Dans tout cet exercice, les nombres considérés sont des entiers naturels non nuls.

Un nombre de Niven est un entier naturel non nul divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, 27 est un nombre de Niven, car $27 = 3 \times 9$, mais 28 n'en est pas un, car 28 n'est pas divisible par 10.

Partie 1 :

1. Les nombres 26 ; 100 ; 2001 ; 2023 sont-ils des nombres de Niven? Justifier.
2. Donner le plus petit entier qui n'est pas un nombre de Niven.
3. Soit n un entier naturel non nul. Donner un nombre de Niven à n chiffres.
4. La fonction Python ci-après prend en entrée la valeur entière n et renvoie la somme des chiffres de n.

```
def Somme(n):
    S=0
    while n>0:
        S=S+n%10
        n=n//10
    return S
```

Dans le script ci-dessus, les instructions « n%10 » et « n//10 » donnent respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de n par 10.

   a. En utilisant la fonction Somme, écrire une nouvelle fonction Python qui renvoie le nombre de nombres de Niven strictement compris entre 100 et 200 et la liste de ces nombres.

   b. Donner le nombre de nombres de Niven strictement compris entre 100 et 150 ainsi que la liste de ces nombres.

Partie 2 :

Indiquer pour chaque affirmation ci-dessous si elle est vraie ou fausse. Les réponses doivent être justifiées.

Affirmation 1 : Le produit d'un nombre de Niven par 10^n, avec n entier naturel, est un nombre de Niven.

Affirmation 2 : La somme de deux nombres de Niven est un nombre de Niven.

Affirmation 3 : Le produit de deux nombres de Niven est un nombre de Niven.

Affirmation 4 : Il existe une infinité de nombres de Niven pairs.

Affirmation 5 : Il existe une infinité de nombres de Niven impairs.

Affirmation 6 : Un entier naturel composé de 9 chiffres identiques est un nombre de Niven.

Affirmation 7 : Un entier naturel composé de 11 chiffres identiques est un nombre de Niven.

Affirmation 8 : Soit n un nombre pair. Un nombre de Niven composé de n chiffres ne peut pas avoir que des chiffres impairs dans son écriture.

Affirmation 9 : Il n'existe pas de nombre premier compris entre 10 et 99 qui soit un nombre de Niven.

Affirmation 10 : Le plus grand nombre premier qui est un nombre de Niven est 7. *Indication : On pourra, sans la démontrer, utiliser la propriété suivante :*

« Pour tout entier $n \geq 3$, $9n \geq 10^{n-1}$ »

Animath CASIO Inria Texas Instruments Crédit Mutuel Enseignant

Annexe de l'exercice 1