CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

Notation exponentielle d'un nombre complexe, graphes	***Le 23 mai 2024***

Exercice 1

1) a) $|a| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Soit θ un argument de a ; on a : $\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$ donc $\arg(a) = \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Par suite, $a = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) $|b| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}$.

Soit θ' un argument de b ; on a : $\left.\begin{array}{l} \cos(\theta') = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta') = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ donc $\arg(b) = \theta' = \dfrac{5\pi}{6}$.

Par suite, $b = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

2) $a \times b = 2\sqrt{6}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\sqrt{6}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{6}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}$; $-3 - i\sqrt{3} = \overline{b} = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$;

$-\dfrac{1}{2}(1+i) = e^{i\pi} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $-1-i = -a = e^{i\pi} \times \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$;

$$\frac{b^3}{a^2} = \frac{\left(2\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{24\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}\times 3}}{2\, e^{i\frac{\pi}{4}\times 2}} = \frac{24\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{2}}}{2\, e^{i\frac{\pi}{2}}} = 12\sqrt{3}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} = 12\sqrt{3}\, e^{2i\pi}.$$

Exercice 2

On applique une formule d'Euler : $\cos^4(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$.

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4 + 4\left(e^{ix}\right)^3 e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2 + 4e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

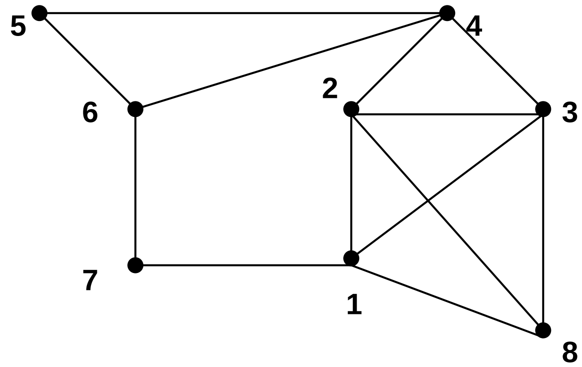
$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right) + 6\right) \end{aligned}$$

Or $e^{4ix} + e^{-4ix} = 2\cos(4x)$ et $e^{2ix} + e^{-2ix} = 2\cos(2x)$, donc

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

Exercice 3

1)



Les sommets de ce graphe représentent les pays, et les arêtes représentent les frontières entre deux pays.

2) a) L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Donc **l'ordre de ce graphe est 8**.

Le graphe n'est pas complet car les sommets 5 et 7 ne sont pas adjacents.

Le graphe est connexe car pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant.

b)

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes. **Il y a donc 13 arêtes**.

3) a) **La distance entre les sommets 1 et 5 est égale à 3**. En effet, la distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.

b) Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.
Donc, **le diamètre de ce graphe est 4**.

4) a) Il est possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule, que s'il existe un cycle eulérien dans le graphe.
Or il n'y a pas de cycle eulérien car il existe deux sommets de degré impair.
Par conséquent, **il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule**.

b) Répondre à cette question revient à voir s'il existe une chaîne eulérienne dans ce graphe.
Or il y a deux sommets de degré impair ; donc il existe une chaîne eulérienne entre les sommets 6 et 8.
Par conséquent, **il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays (entre les pays 7 et 8)**.