CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

PGCD, nombres premiers	Le 4 avril 2024

Exercice 1

1) Comme $\sqrt{419} \approx 20{,}5$, il suffit d'examiner si 419 est divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. Puisque 419 n'a pas de diviseurs premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{419}$, d'après le critère d'arrêt, **419 est premier**.

2) $\mathbf{8\,316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11}$.
$(2+1)\times(3+1)\times(1+1)\times(1+1) = 48$; **8 316 a donc 48 diviseurs**.

Exercice 2

On remarque que $9\times(2n+1)-2(9n+4)=18n+9-18n-8=1$.
D'où $9\times a-2b=1$; d'après le théorème de Bézout, **les nombres a et b sont premiers entre eux**.

Exercice 3

1) On a : 1 064 = 700 × 1 + 364
700 = 364 × 1 + 336
364 = 336 × 1 + 28
336 = 28 × 12
Le PGCD étant le dernier reste non nul, alors **PGCD(1 064; 700) = 28**.

2) a) Soit d est le PGCD de a et b.
d divise a et b, donc divise toute combinaison linéaire de a et de b.
Or $5a-3b=5(3n+1)-3(5n-1)=15n+5-15n+3=8$.
Par conséquent, **le PGCD de a et b est un diviseur de 8**.

b) Si $d=8$ alors a et b sont multiples de 8.
En utilisant les congruences, on peut en déduire que :

• $3n+1\equiv 0 \quad [8]$, ce qui équivaut à $3n\equiv -1 \quad [8]$.
D'où $9n\equiv -3 \quad [8]$, c'est-à-dire $9n\equiv 5 \quad [8]$ ou encore $n\equiv 5 \quad [8]$.

• $5n-1\equiv 0 \quad [8]$, ce qui équivaut à $5n\equiv 1 \quad [8]$.
D'où $25n\equiv 5 \quad [8]$, c'est-à-dire $24n+n\equiv 5 \quad [8]$ ou encore $n\equiv 5 \quad [8]$.

Par conséquent, **le PGCD de a et b est égal à 8 lorsque $n\equiv 5 \quad [8]$**.

Exercice 4

1) a) **Le couple $(3\ ;\ 4)$ est une solution particulière de (E)**.

b) Soit $(x\ ;y)$ une solution de (E). Ce couple est solution du système $\begin{cases}7x-5y=1\\7\times3-5\times4=1\end{cases}$.

En soustrayant termes à termes, on obtient l'égalité suivante : $7(x-3)-5(y-4)=0$, c'est-à-dire $7(x-3)=5(y-4)$.
On en déduit que 5 divise $7(x-3)$. Or 5 et 7 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(x-3)$.
Il existe donc un entier k tel que $x-3=5k$, c'est-à-dire $x=3+5k$.

En remplaçant $x-3$ par $5k$ dans l'équation $7(x-3)=5(y-4)$, on obtient :
$7\times 5k=5(y-4)$, c'est-à-dire $y-4=7k$. Par suite, $y=4+7k$.
Réciproquement, de tels couples sont bien solutions de (E) car :
$7(3+5k)-5(4+7k)=21-20=1$.

Par conséquent, **l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation $7x-5y=1$ sont de la forme $\begin{cases} x=3+5k \\ y=4+7k \end{cases}$, avec k entier relatif**.

2) Soit x, y et z le nombre respectif de jetons rouges, verts et blancs.

D'après les données de l'énoncé, on obtient le système suivant : $\begin{cases} 7x-5y=1 & (1) \\ x+y+z=25 & (2) \end{cases}$.

• De (1), on en déduit que $x=3+5k$ et $y=4+7k$.

• De (2), on en déduit que $x+y=25-z$. Comme $z\geq 0$, $0\leq x+y\leq 25$.

Par suite, $0\leq 3+5k+4+7k\leq 25$, c'est-à-dire $0\leq 7+12k\leq 25$, ou encore $-\dfrac{7}{12}\leq k\leq \dfrac{18}{12}$.

Comme k est un entier, alors $k=0$ ou $k=1$.

Si $k=0$, alors $x=3$, $y=4$ et $z=25-3-4=18$.
Si $k=1$, alors $x=8$, $y=11$ et $z=25-8-11=6$.

Il peut donc y avoir : soit 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs, soit 8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs.