LES NOMBRES COMPLEXES : ÉQUATIONS POLYNOMIALES

Cours	Terminale maths expertes

Objectifs :

- *Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.*
- *Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.*
- *Factoriser un polynôme dont une racine est connue.*

1. Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 1. *Propriété fondamentale*

Soit l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels et a non nul. Le discriminant de cette équation est le réel : $\Delta=b^2-4ac$.

- **Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1=$................ et $z_2=$.................**
- **Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution réelle double : $z_0=$.................**
- **Si $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=$................ et $z_2=$.................**

Démonstration : Comme $a\neq 0$, pour tout nombre complexe z : $az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)$.

D'où, $az^2+bz+c=a\left((................)^2-..........+..........\right)=a\left((................)^2-\frac{................}{..........}\right)$.

Posons $\Delta=b^2-4ac$; on obtient ainsi, $az^2+bz+c=a\left((................)^2-\frac{.........}{.........}\right)$.

Par suite, $az^2+bz+c=0$ équivaut à $(................)^2-\frac{.........}{.........}=0$ car a est non nul, c'est-à-dire

à $(................)^2=\frac{.........}{.........}$.

Dans le cas $\Delta\geq 0$, les solutions ont déjà été déterminées en Première.

Si $\Delta<0$, $(................)^2-\frac{.........}{.........}=0$ peut s'écrire $(................)^2=\frac{.........}{.........}$ et $-\Delta<0$.

Par suite, $z+.........=.........=.........$ ou $z+.........=.........=.........$.

C. Lainé

On en déduit que $z = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$ ou $z = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $z^2+5=0$; b) $z^2+3z+4=0$.

[corrigés en vidéo]

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $2z^2+3z-5=0$; b) $z^2-3z+\frac{9}{4}=0$;

c) $z^2-4z+8=0$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $z^4+2z^2-8=0$; b) $\frac{z}{4}=1-\frac{2}{z}$;

c) $\frac{5}{z^2}=\frac{3}{z}-\frac{1}{2}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants : 1) $\begin{cases} z+t=6 \\ zt=34 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} z+t=1 \\ zt=2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} z+t=-5 \\ zt=5 \end{cases}$

2. Équations polynomiales à coefficients réels

Définition 1. ***Fonction polynomiale de degré n à coefficients réels***

Une fonction polynôme (ou polynôme) P est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme
$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n$, où a_0, a_1, a_2, …, a_n sont les coefficients réels de P.
L'entier n est appelé le degré du polynôme P.
L'équation $P(z)=0$ est appelée équation polynomiale de degré n. Les solutions de cette équation s'appellent les racines de P.

Exemple : Les nombres complexes i et $-i$ sont les racines du polynôme $z^2+1=0$.

Propriétés 1. ***Polynôme nul***

Un polynôme est le polynôme nul, si et seulement si, tous ses coefficients sont ……………

Théorème 1. ***Factorisation de $z^n - a^n$***

Soit un polynôme P définie par $P(z)=z^n-a^n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Alors il existe un polynôme Q de degré ……… tel que $P(z)=(..............)Q(z)$.

Démonstration : - Si $a=0$: c'est évident.
- Si $a=1$: on obtient $z(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\cdots+z+1)=z^n+z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^2+z$
$1(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\cdots+z+1)=z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\cdots+z+1$
En soustrayant membre à membre, on a : $(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\cdots+z+1)=z^n-1$
- Si $a\neq 0$ quelconque : on remplace z par z/a dans l'égalité ci-dessus :
$$\left(\frac{z}{a}-1\right)\left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{z^{n-2}}{a^{n-2}}+\frac{z^{n-3}}{a^{n-3}}+\cdots+\frac{z}{a}+1\right)=\frac{z^n}{a^n}-1$$
En multipliant chaque membre par a^n,on obtient :
$$(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+\cdots+a^{n-2}z+a^{n-1})=z^n-a^n$$
Il existe donc un polynôme $Q(z)=z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+\cdots+a^{n-2}z+a^{n-1}$ de degré $n-1$, tel que $P(z)=(z-a)Q(z)$.

Exemple : $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$

Exercice 5

Pour chacun des polynômes à coefficients complexes suivants :
- les écrire sous la forme z^n-a^n avec $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$
- puis les factoriser par $z-a$.

1) $P(z)=z^3+1$; 2) $P(z)=z^3-8$; 3) $P(z)=z^3+i$; 4) $P(z)=z^3+8i$; 5) $P(z)=z^5-32i$.

Théorème 2. ***Factorisation d'un polynôme dont une racine est connue***

Soit un polynôme P de degré n. Si a est une racine complexe de P, alors il existe un polynôme Q de degré ……… tel que $P(z)=(..............)Q(z)$.

Démonstrations : Comme a est une racine complexe de P, on a : $P(a)=0$.
Donc : $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n-P(a)$
$=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n-a_0-a_1a-a_2a^2-\cdots-a_na^n$
$=a_1(z-a)+a_2(z^2-a^2)+\cdots+a_n(z^n-a^n)$
Or, pour tout k compris entre 1 et n, il existe un polynôme Q_{k-1} de degré $k-1$, tel que : $z^k-a^k=(z-a)Q_{k-1}(z)$.

Par suite : $P(z)=a_1(z-a)Q_0(z)+a_2(z-a)Q_1(z)+\cdots+a_n(z-a)Q_{n-1}(z)$
$=(z-a)(a_1Q_0(z)+a_2Q_1(z)+\cdots+a_nQ_{n-1}(z))$

Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$, tel que : $P(z)=(z-a)Q(z)$.

Exemple : Comme 2 est une racine de z^2-4, alors $z^2-4=(z-2)$.............

Exercice 6

Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z)=z^3+z^2+4z+4$.

corrigé en vidéo

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+z^2-3z+1=0$.

corrigé en vidéo

Théorème 3.

Un polynôme de degré n admet ………………………………………

Démonstration : Supposons que les nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ soient des racines deux à deux distinctes du polynôme P.
Alors il existe un polynôme Q_1 tel que : $P(z)=(z-\alpha_1)Q_1(z)$.
Or, $0=P(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)Q_1(\alpha_2)$ et $\alpha_2-\alpha_1\neq 0$. Donc $Q_1(\alpha_2)=0$.
Ainsi, il existe un polynôme Q_2 tel que : $Q_1(z)=(z-\alpha_2)Q_2(z)$.
Et donc : $P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)Q_2(z)$.
En continuant ainsi avec des polynômes $Q_3, Q_4, \ldots Q_p$, on obtient :

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_p)Q_p(z).$$

On en déduit que le polynôme P est de degré $p+degré(Q_p)\geq p$.

Exercice 8

Pour tout nombre complexe z, on note $P(z)=z^3-3z^2+9z+13$.

1) Vérifier qu'il existe un entier α appartenant à $\{-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1;\ 2\}$ tel que $P(\alpha)=0$.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z)=(z-\alpha)(az^2+bz+c)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Exercice 9

Pour tout nombre complexe z, on note $P(z)=z^4-2z^3+3z^2-2z+2$.

1) Calculer $P(i)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Déterminer la forme exponentielle des solutions.

Exercice 10

Pour tout nombre complexe z, on note $P(z)=4z^4+4\sqrt{3}z^3+7z^2+3\sqrt{3}z+3$.

1) Démontrer qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z, $P(z)=(4z^2+3)Q(z)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.