# LES NOMBRES COMPLEXES : FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE ET FORME EXPONENTIELLE

| Cours | Terminale maths expertes |
|---|---|

**Objectifs :**

- *Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme exponentielle et inversement.*
- *Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.*
- *Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration, suites, etc.), calculer des puissances de nombres complexes.*
- *Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.*

## 1. Formules de trigonométrie

**Propriété 1.** ***Formules d'addition***

**Pour tous réels $a$ et $b$ :**

$\cos(a-b) =$ ................................................ ;

$\cos(a+b) =$ ................................................ ;

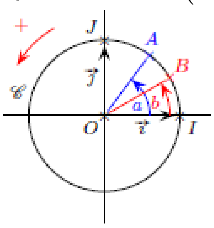
$\sin(a-b) =$ ................................................ ;

$\sin(a+b) =$ ................................................

*Démonstration* : On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O muni du repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

On note $A$ et $B$ les points de $\mathscr{C}$, définis par $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OA}\right) = a$ et $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OB}\right) = b$.

Les coordonnées de $A$ et de $B$ sont respectivement (........... ; ...........) et (........... ; ...........).




- D'après la relation de Chasles, on a :

$\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OA},\ \vec{i}\right) + \left(\vec{i},\ \overrightarrow{OB}\right) = -\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OA}\right) + \left(\vec{i},\ \overrightarrow{OB}\right) =$ ........ + ............ = .......... .

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$ :

- en utilisant les coordonnées : $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} =$ ........................................... ;



C. Lainé

- en utilisant $\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ : $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=$ ...............................................................

On en déduit que : $\cos(a-b)=$ ....................................... .

- $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))==$ ....................................... .

Or $\cos(-b)=$ ........... et $\sin(-b)=$ ........... .

Par conséquent, $\cos(a+b)==$ ....................................... .

- $\sin(a+b)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)-b\right)=$ .......................................

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=$ ........... et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=$ ........... .

Par conséquent, $\sin(a+b)=$ ....................................... .

- $\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=$ ....................................... .

Or $\cos(-b)=$ ........... et $\sin(-b)=$ ........... .

Par conséquent, $\sin(a-b)=$ ....................................... .

**Exercice 1**

1) Démontrer que $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$.

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

[corrigé en vidéo]

**Exercice 2**

Sachant que $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 3**

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

**Propriété 2. *Formules de duplication***

**Pour tout réel $a$ :**

$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ ;

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$.

*Démonstrations* : Prenons $b=a$ dans les formules d'addition précédentes, on obtient :

$\sin(2a) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots.$

$\cos(2a) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots.$

De plus, $\cos^2(a) + \sin^2(a) = \dots\dots$, d'où $\sin^2(a) = \dots\dots\dots\dots$ et $\cos^2(a) = \dots\dots\dots\dots.$

On en déduit que $\cos(2a) = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots.$

*Remarque* : On peut en déduire des formules, appelée formules de linéarisation :

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

**Exercice 4**

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

corrigé en vidéo

**Exercice 6**

Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $\cos(2x) = \sin(x)$.

corrigé en vidéo

**Exercice 7**

1) Montrer que, pour tout réel $x$, $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) a) Exprimer $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

b) En déduire les solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi[$ de l'équation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = -1$.

3) On cherche à déterminer deux réels $A$ $(A > 0)$ et $\alpha$ $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ tels que $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = A\cos(x+\alpha)$.

a) Factoriser l'expression √$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ par 2.

b) Conclure en utilisant une formule trigonométrique d'addition.

## 2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit la fonction $f$ : $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ ($\theta$ étant un nombre réel).

$f(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$ est un nombre complexe ayant pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$.

$f(\theta)$ a pour module 1 et pour argument $\theta$.

$f(\theta')$ a pour module 1 et pour argument $\theta'$.

Alors $f(\theta)\times f(\theta')$ a donc pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$, donc :

$f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$.

De plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i = 1$.

La fonction $f$ définie précédemment vérifie les propriétés d'une fonction exponentielle étudiée en analyse ce qui conduit à la notation suivante :

**Définition 2.**

**Pour tout réel $\theta$, on a : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.**

*Remarque* : $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module …… et d'argument …….

*Exemples* : Écrire sous la forme algébrique les nombres suivants : $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $e^{2i\pi}$.

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$. Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 ; 1783).

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**Propriété 3.** ***Forme exponentielle d'un nombre complexe***

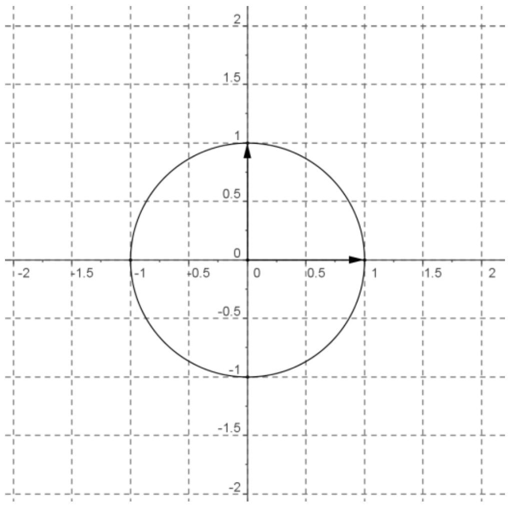
**Tout nombre complexe $z$ non nul peut s'écrire sous la forme $z = \dots\dots\dots\dots\dots$ où $\theta$ est un argument de $z$.**

*Exemple* : $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

**Exercice 8**

Placer dans le repère ci-contre les points images des complexes suivants :

$e^{i\pi}$ ; $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ; $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ; $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ; $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-2i\pi}$.




**Exercice 9**

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -3$ c) $z_3 = \sqrt{3} - 3i$.

méthode en vidéo

**Exercice 10**

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

corrigés en vidéo

**Exercice 11**

Écrire sous la forme exponentielle les nombres suivants : $z_1 = -10$ et $z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

**Exercice 12**

Écrire sous la forme exponentielle les nombres suivants : $z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$ et $z_2 = ie^{i\frac{\pi}{3}}$.

**Propriétés 4.**

**Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$, et pour tout entier naturel $n$ :**

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\overline{e^{i\theta}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

*Démonstrations* : Ce sont des conséquences des propriétés 3.

*Remarque* : De la première propriété, on en déduit que
$(\cos\theta + i\sin\theta)\times(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$.
D'où $(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$
Par identification des parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient les formules : $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$.
Par suite, en prenant $\theta' = \theta$, on obtient : $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

**Exercice 13**

1) Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants : $iz$ ; $i\bar{z}$ et de $-\dfrac{2i}{z}$.

corrigés en vidéo

**Exercice 14**

On donne $z=\sqrt{3}+i$.

Écrire $z$ sous forme exponentielle, puis en déduire la forme algébrique de $\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}$.

**Exercice 15**

Soit $z=1-i$.

1) Écrire $z$ sous forme exponentielle.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ multiple de 4, $z^n$ est un nombre entier pair.

**Propriété 5. *Formule de Moivre***

**Pour tout réel $\theta$ et pour tout entier naturel $n$, on a : $\left(e^{i\theta}\right)^n=$ ............ , que l'on peut également écrire $\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^n=$ ......................................... .**

**Exercice 16**

Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

[corrigé en vidéo]

Si on pose $z=e^{i\theta}$, on a $\overline{z}=e^{-i\theta}$. On obtient donc : $\cos\theta=\mathrm{Re}(z)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\mathrm{Im}(z)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. Ces formules sont appelées formules d'Euler.

**Propriété 6. *Formules d'Euler***

**Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$ : $\cos(\theta)=\mathrm{Re}(z)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\mathrm{Im}(z)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.**

**Exercice 17**

a) Linéariser l'expression $\cos^3(x)$. Linéariser une telle expression consiste à la ramener comme somme d'expressions du type $\cos(ax)$ et $\sin(ax)$.

b) En déduire une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^3(x)$.

[corrigé en vidéo]

**Exercice 18**

Linéariser l'expression $\sin^5(x)$.

**Exercice 19**

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ :

1) $\cos(x)+\cos(3x)$ ; 2) $\sin(3x)-\sin(5x)$.

**Exercice 20**

En utilisant les formules d'Euler, montrer que, pour tous réels $x$ et $y$ :

$\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$.

## 3. Racines $n$-ièmes de l'unité

**Définition 3.** *Racines n-ièmes de l'unité*

**Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.**
**On appelle racine $n$-ième de l'unité tout nombre complexe $z$ tel que $z^n=1$.**
**On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité.**

*Exemple* : Les racines 2-ièmes de l'unité sont : ……………

**Propriété 7.** *Racines n-ièmes de l'unité*

**L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines de l'unité possède exactement $n$ racines : ……………..,**
**avec $k$ entier compris entre 0 et $n-1$.**

*Démonstration* : • **Existence** : ……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

• **Unicité** : ……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

**Exercice 21**

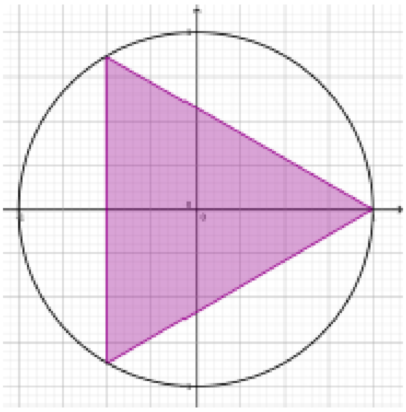
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(z-1)^3=1$ ; 2) $z^5=-1$.

[corrigés en vidéo]

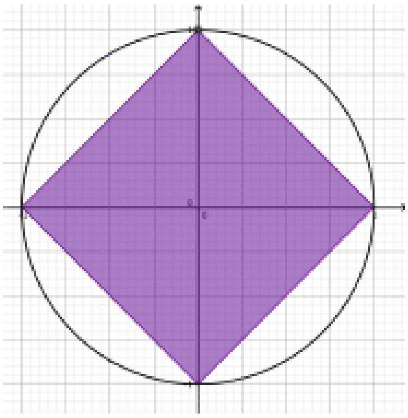
**Propriété 8.** ***Représentation géométrique des racines n-ièmes de l'unité***

**Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.**
**Les racines $n$-ièmes de l'unité sont les affixes d'un polygone régulier à $n$ côtés, inscrit dans le cercle unité.**

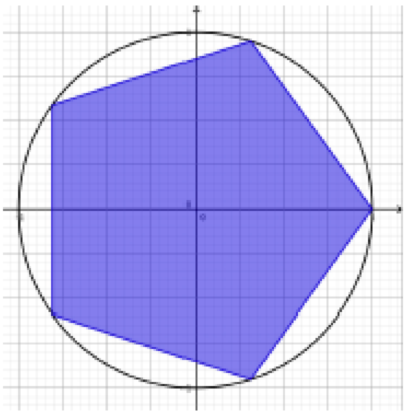
- Les éléments de $\mathbb{U}_3$ $(1, j$ et $j^2)$ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.



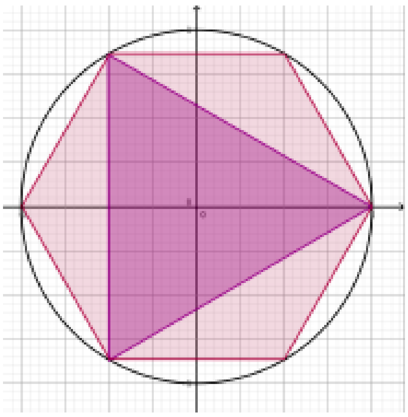
- Les éléments de $\mathbb{U}_4$ $(1, i, i^2$ et $i^3)$ sont les affixes des sommets d'un carré.



- Les éléments de $\mathbb{U}_5$ $\left(1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}} \text{ et } e^{\frac{8i\pi}{5}}\right)$ sont les affixes des sommets d'un pentagone régulier.



- Les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont les affixes des sommets d'un hexagone régulier. On remarque que $\mathbb{U}_6$ contient $\mathbb{U}_3$.



**Exercice 22**

Démontrer que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à $10\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

[corrigé en vidéo]