LES GRAPHES : PARTIE 2

Cours	*Terminale maths expertes*

Objectifs :

• *Associer un graphe orienté pondéré à une chaîne de Markov à deux ou trois états.*
• *Étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante).*

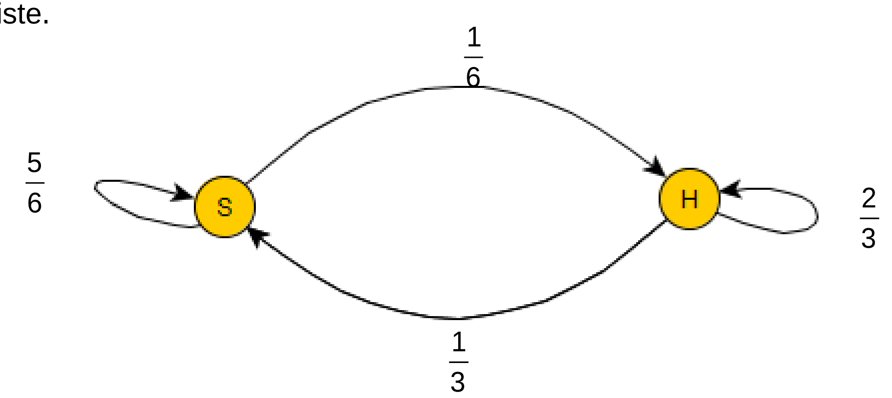
1. Chaîne de Markov

Dans une localité, on suppose que chaque jour, il fait soit sec, soit humide.
On fait l'hypothèse que :

● S'il fait sec un jour, alors il fera encore sec le lendemain avec la probabilité $\frac{5}{6}$.

● S'il fait humide un jour, alors il fera encore humide le lendemain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Un certain dimanche (choisi pour jour 0), il fait sec.
On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.
Pour visualiser la situation, on peut la représenter par le schéma suivant, appelé graphe probabiliste.



Définition 1. ***Graphe pondéré et graphe probabiliste***

• Un graphe pondéré est un graphe dans lequel chaque arête est affectée d'un ……………………… positif appelé ………………… de cette arête.

• Un graphe probabiliste est un graphe …………….. et ……………. possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à …….

On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs *H* (humide), *S* (sec) à l'étape n, c'est-à-dire le jour n.
H et *S* s'appellent les **états** de X_n.
Par exemple, $X_{10} = H$ signifie qu'il fera humide le 10$^{\text{ème}}$ jour.

La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée ……………………… (ou ……………… ………………) sur l'ensemble des issues $\{H,S\}$.

Dans une chaîne de Markov, l'état du processus à l'étape n + 1 ne dépend que de celui à l'état n, mais non de ses états antérieurs.

On considère la loi de probabilité de X_n, appelée ………………………………, qui donne la probabilité qu'il fasse humide ou sec le jour n.

Définition 2. ***Matrice de transition d'une chaîne de Markov***

La matrice de transition d'une chaîne de Markov est la matrice ……………… dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est la ……………………… du sommet i vers le sommet j.

Exemple :

Transition du sommet S vers le sommet H

Dans l'exemple précédent, la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

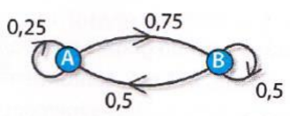
Transition du sommet H vers le sommet S

Remarque : La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à …….

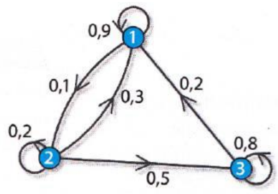
Exercice 1

Déterminer la matrice de transition des deux graphes probabilistes ci-dessous :

a) graphe probabiliste à deux états A et B

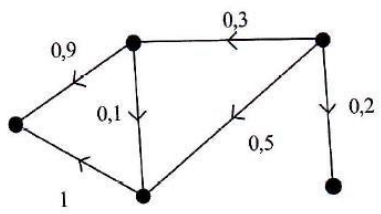


b) graphe probabiliste à trois états 1, 2 et 3

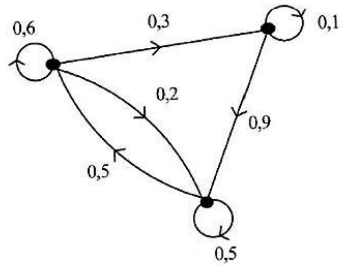


Exercice 2
Les graphes 1 et 2 sont-ils des graphes probabilistes ? Justifier.
Compléter le graphe 3 pour qu'il soit un graphe probabiliste.

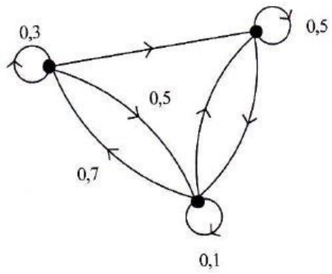
graphe 1



graphe 2



graphe 3

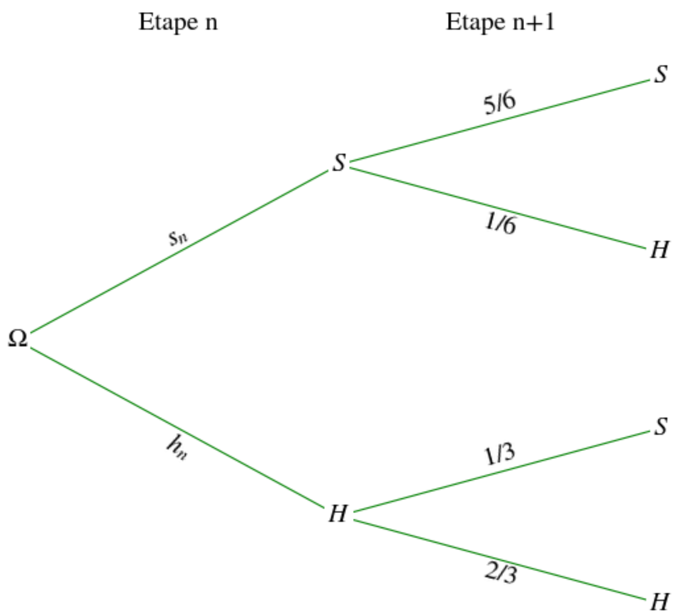


Définition 3. ***État probabiliste après n étapes***

L'état probabiliste après *n* étapes de la chaîne de Markov est la matrice ………….. dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après *n*

Exemple : Dans l'exemple du temps dans la localité, la matrice ligne des états après la 3ème étape donnerait les probabilités qu'il fasse sec ou humide après 3 jours.

Pour tout entier naturel n, on notera s_n la probabilité qu'il fasse sec le jour n, et h_n la probabilité qu'il fasse humide le jour n.
L'arbre de probabilité ci-dessous permet de résumer les probabilités de transition de l'étape n à l'étape $n+1$.



D'après l'arbre pondéré : $s_{n+1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ et $h_{n+1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$.

Si on note $\pi_n = \begin{pmatrix} s_n & h_n \end{pmatrix}$, on a $\pi_{n+1} = \pi_n \times M$ avec $M = \begin{pmatrix} \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \\ \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \end{pmatrix}$.

Propriété 1.

On considère une chaîne de Markov de matrice de transition M et dont la matrice ligne des états à l'étape n est π_n.
Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times M$, et $\pi_n = \pi_0 \times \dots\dots$ où π_0 est l'état initial.

• *Démonstration* : Soient $\pi_n = \begin{pmatrix} s_n & h_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après n étapes, et, S et H les états de X_n.

$\mathrm{s}_{n+1} = P(X_{n+1} = \mathrm{S}) = P_{X_n=\mathrm{S}}(X_{n+1} = \mathrm{S})\, P(X_n = \mathrm{S}) + P_{X_n=\mathrm{H}}(X_{n+1} = \mathrm{S})\, P(X_n = \mathrm{H})$ selon la formule des probabilités totales.
Soit : $\mathrm{s}_{n+1} = P_{X_n=\mathrm{S}}(X_{n+1} = \mathrm{S})\, \mathrm{s}_n + P_{X_n=\mathrm{H}}(X_{n+1} = \mathrm{S})\, \mathrm{h}_n$.
On reconnait le premier coefficient du produit $\pi_n \times M$.
On prouve de même que h_{n+1} est le deuxième coefficient du produit $\pi_n \times M$.

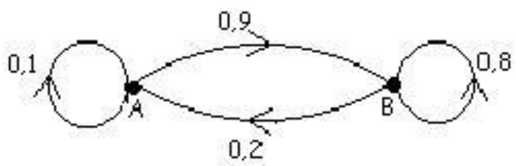
• La démonstration de l'expression explicite $\pi_n = \pi_0 \times M^n$ est semblable à celle faite dans le chapitre des matrices.

Exemple : Reprenons l'exemple du temps. D'après la propriété, on en déduit que, pour tout entier n, $\pi_n = \pi_0 \times M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \\ \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \end{pmatrix}^n$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\begin{pmatrix} \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \\ \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} \frac{\dots\dots}{\dots\dots} & \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \\ \frac{\dots\dots}{\dots\dots} & \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \end{pmatrix}$.

Par suite, $\pi_{10} = \begin{pmatrix} \frac{\dots\dots}{\dots\dots} & \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \end{pmatrix}$. Ce qui signifie qu'au dixième jour, la probabilité qu'il fasse sec est d'environ ……….

Exercice 3
Deux frères Maé (A) et Liam (B) font une partie de billes chaque jour.
Voici le graphe probabiliste décrivant la situation à la fin de chaque journée.



1) Trouver un texte décrivant cette situation.
2) Donner la matrice de transition.
3) Si les joueurs ont 100 billes chacun le 1er jour, donner la répartition à laquelle on peut s'attendre après le 4ième jour.

2. Distribution invariante d'une chaîne de Markov

Définition 4. ***Chaîne de Markov convergente***

On dit qu'une chaîne de Markov, de matrice de transition M, est ……………….. si la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov ……………….

Définition 5. ***Distribution invariante d'une chaîne de Markov***

Si la suite (π_n) des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie la relation $\pi_{n+1} = \pi_n \times M$, alors la limite π de cette suite définit un état stable, solution de l'équation ...... = ...

On dit que la matrice π est une ……………………………. de la chaîne de Markov.

Exemple : Reprenons l'exemple du temps. Soit $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

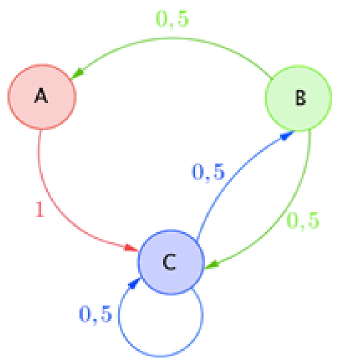
On remarque que $X \times M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \\ \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \end{pmatrix} = \dots\dots$.

Donc l'état stable est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Remarque : Cette méthode ne prouve pas que la marche aléatoire est convergente.
En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

Exercice 4

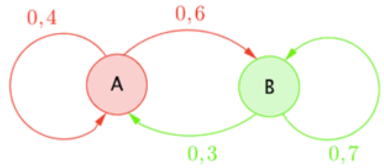
On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre où l'on part de A.
À l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette chaîne de Markov.
On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).



C. Lainé

Exercice 5

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre.
Étudier la convergence de cette chaîne.



corrigé en vidéo

Exercice 6

Un étudiant a l'habitude de travailler de la manière suivante : s'il a étudié une nuit, la probabilité qu'il étudie la nuit suivante est 0,5 ; s'il n'a pas étudié une nuit, la probabilité qu'il étudie la nuit suivante est 0,8.

1) Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Donner la matrice de transition.

2) Sachant qu'il a étudié la 1ère nuit, quelle est la probabilité qu'il étudie la 3ième nuit.

3) Après trois années, quelle est la probabilité qu'il étudie une nuit donnée.

Exercice 7

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant. Au début de l'étude, 70 % de ces téléspectateurs regardent la chaîne A. Une étude statistique a montré que 15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.
On a aussi noté que 10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante.

1) Donner l'état initial.
2) Déterminer le graphe et la matrice de transition associés à la chaîne de Markov traduisant la situation.
3) Déterminer le pourcentage de téléspectateurs qui regardent la chaîne A un mois après l'étude.
4) Déterminer et interpréter la distribution invariante de ce système.

Exercice 8

Dans la cour de récréation d'une école, 3 enfants A, B, C jouent au ballon.

- L'élève A, dès qu'il détient le ballon, le garde encore 3 secondes avec une probabilité 0,1 ou bien l'envoie avec une probabilité 0,4 à B, avec une probabilité 0,5 à C (ce qui prend également 3 secondes).
- L'élève B, dès qu'il détient le ballon, le garde encore 3 secondes avec une probabilité 0,3 ou bien l'envoie avec une probabilité 0,1 à A, avec une probabilité 0,6 à C (ce qui prend également 3 secondes).
- L'élève C, dès qu'il détient le ballon, le garde encore 3 secondes avec une probabilité 0,2 ou bien l'envoie avec une probabilité 0,4 à A, avec une probabilité 0,4 à B (ce qui prend également 3 secondes).

Au début du jeu, le joueur A a le ballon.

1) Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2) Soit M sa matrice de transition associée à ce graphe et P0 la matrice ligne donnant l'état probabiliste initial.
   a) Donner M et P_0.
   b) Calculer, à l'aide de la calculatrice, M^3 et donner l'état probabiliste au bout de 9 secondes.
   c) Calculer, à l'aide de la calculatrice, l'état probabiliste au bout de 1 minute.
   d) On suppose qu'au bout d'un temps assez long on ait atteint un état probabiliste stationnaire. Calculer alors les probabilités de trouver le ballon en A, B et C.
3) Reprendre la question 2) si un autre joueur que A possède initialement le ballon.

Exercice 9

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique. On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.

La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.
L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », notée A, conserve 80 % de sa clientèle et récupère 15 % des clients de la société concurrente, notée B.

Pour tout entier naturel *n*, on note pour la saison (2005 + n) :

– a_n la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A),
– b_n la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B),
– $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, la matrice traduisant l'état probabiliste, avec $a_n + b_n = 1$.

Les résultats pour les probabilités seront arrondis à 10^{-4}.

1) a) Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets nommés A et B.
   b) On note M la matrice de transition de ce graphe.
   Recopier et compléter sur la copie la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & \cdots \\ 0{,}15 & \cdots \end{pmatrix}$.

2) En 2005, la société « Alizés » a transporté 45% des touristes. On a donc $a_0 = 0{,}45$.
   a) Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.
   b) Déterminer la matrice P_2 et interpréter ces résultats.

3) Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec a et b deux réels positifs tels que $a + b = 1$.
   a) Déterminer a et b tels que $P = P \times M$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.
   c) Interpréter ce résultat.

4) On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est $\frac{3}{7}$.

On interroge quatre touristes choisis au hasard ; les choix des touristes sont indépendants les uns des autres. Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.