LES GRAPHES : PARTIE 1	
Cours	***Terminale maths expertes***

Objectifs :

• *Modéliser une situation par un graphe.*
• *Calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe.*

1. Introduction

Problème des ponts de Königsberg : proposé en 1736 par Leonhardt Euler, c'est le premier problème de la théorie des graphes. Il est aujourd'hui parfaitement résolu, mais les habitants de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad, ville russe enclavée entre la Pologne et la Lituanie) ne voyaient pas comment faire. Au XVIIIe siècle, la ville de Königsberg comprenait 2 îles et 7 ponts suivant le plan ci-dessous :

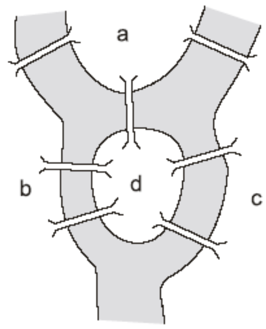


figure 1

Les habitants souhaitaient faire une promenade passant une et une seule fois sur chaque pont. Y sont-ils arrivés ?

Quelques tentatives à la main ne laissent envisager aucune solution ; il s'agit d'aller plus loin que ce simple constat et d'apporter une réponse complète au problème.
Pour cela, l'idée est de commencer par traduire l'énoncé du problème par un schéma : chaque lieu de la ville est repéré par sa position géographique : **a** pour le nord de la ville ; **b** pour l'ouest de la ville, **c** pour l'est et **d** pour l'île. Chaque pont sera alors représenté par un « trait » reliant ces lieux entre eux.
Cette modélisation s'appelle un graphe : « Qu'est-ce qu'un graphe ? » C'est un ensemble de sommets et de liens entre 2 sommets que l'on appelle arêtes.

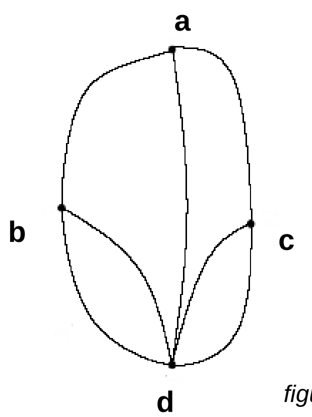
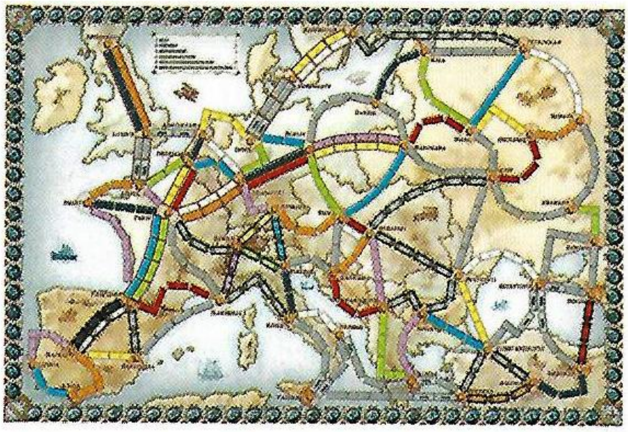


figure 2

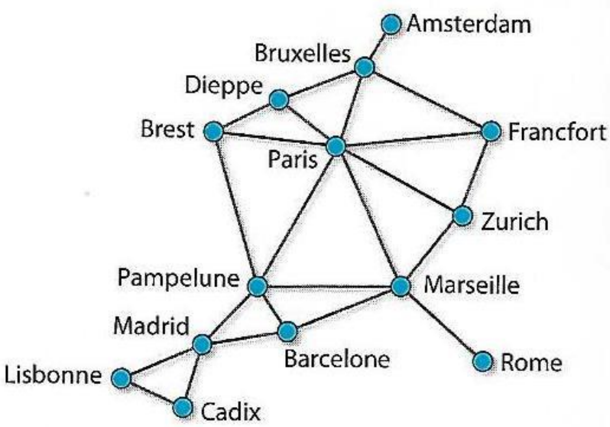
La traduction du problème de départ en termes de propriétés du graphe est alors :
« Peut-on circuler sur le graphe à partir d'un sommet en empruntant une fois et une seule chaque arête ? »
On va oublier pour un temps la situation géographique et s'intéresser à **l'objet mathématique** qu'est le graphe.

2. Vocabulaire des graphes

« Les aventuriers du Rail » est un jeu de société sur plateau qui a pour but de relier les gares de différentes villes sur une carte préexistante, pour ainsi créer son réseau ferroviaire au détriment des autres joueurs.
Voici une reproduction du plateau de jeu de l'édition Europe.



Si l'on extrait une partie des liaisons ferroviaires, on obtient le schéma ci-contre : ce schéma est un *graphe*.
Chaque ville est un *sommet* du graphe.



1) Combien de sommets y a-t-il dans ce graphe ?
L'ordre d'un graphe est le nombre total de ses sommets.
Quel est alors l'ordre du graphe de ce problème ?
2) Certains des sommets sont reliés par des arêtes. En donner le nombre exact.
3) Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes reliées à ce sommet.
Quel est le degré de Paris ? Celui de Rome ? Celui de Marseille ?

Définition 1. ***Vocabulaire des graphes***

- **On appelle graphe non orienté un ensemble de ………….., appelés ………………, reliés par des ………………., appelées ………………………..**
- **L'ordre d'un graphe est le nombre de ses ……………………**
- **Le degré d'un sommet est le nombre ………… ayant ce sommet pour extrémité.**
- **Deux sommets reliés par une arête sont dits …………………..**
- **Une boucle est une …………………. dont les extrémités ont le même sommet.**
- **Un sommet est dit …………… s'il n'est relié à aucun autre sommet du graphe.**

C. Lainé

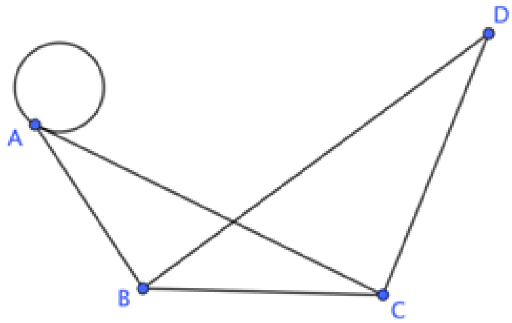
Exemple : Le schéma suivant s'appelle un graphe.

Il possède …… sommets ; on dit qu'il est d'ordre …...

Les sommets A et C sont ……………… car ils sont reliés par une arête.

Le sommet C est de degré …… car ….. arêtes partent de C.

Le sommet A possède …… boucle.



Remarques : • Deux sommets peuvent être liés par plusieurs arêtes : on les appelle arêtes parallèles. Une arête peut avoir ses extrémités confondues : on parle de boucle. Dans ces deux cas, le graphe considéré est en fait un **multigraphe.**

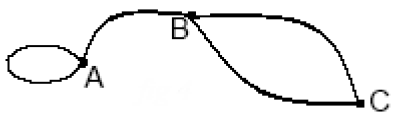


figure 3

• Un graphe orienté est un graphe dont les lignes sont fléchées ou orientées.

• Les boucles sont comptées deux fois ; par exemple, dans la figure 3, le degré de A est 3.

• Un sommet est pair (respectivement impair) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).

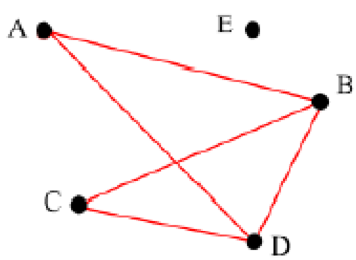
Définition 2. ***Graphe complet***

• Un graphe …………….. est un graphe dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.

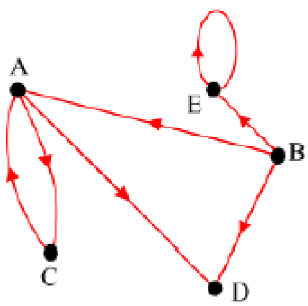
• Un graphe est …………… s'il ne présente aucune boucle et tel qu'entre deux sommets, il y a au plus une arête.

• Un graphe orienté est un graphe tel que les arêtes ont un ………… de parcours : on va d'un sommet vers l'autre (on parle alors d'arc plutôt que d'arête, et de l'origine et de l'extrémité d'un arc).

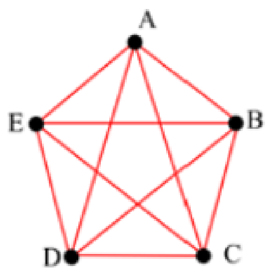
Exemples :



graphe 1



graphe 2



graphe 3

Le graphe 1 est un graphe ………… d'ordre ……, de sommets ………………………...

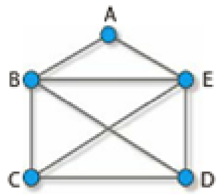
Les sommets A et B sont …………………, A et C ne le sont pas, E est un sommet ………..

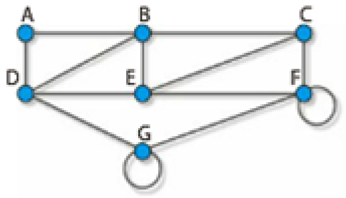
Le graphe 2 est un graphe ……………. ayant …… arcs.

Le graphe 3 est un graphe ……………. d'ordre …...

Exercice 1

Pour les deux graphes ci-dessous, dire s'il s'agit d'un graphe simple ou non, donner le degré de chacun des sommets à l'aide d'un tableau puis donner l'ordre du graphe.



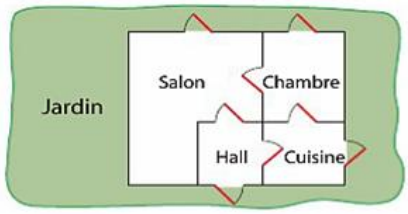


Exercice 2

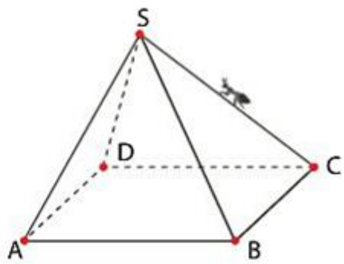
1) Schématiser chaque situation ci-dessous par un graphe.
2) Recopier et compléter le tableau suivant pour chaque situation.
3) Comparer et conclure.

Ordre du graphe					
Nom du sommet					
Degré du sommet					

Première situation : voici le plan du rez-de-chaussée d'une maison.
On s'intéresse à la communication entre les différentes pièces et le jardin.



Deuxième situation : une fourmi se déplace sur les arêtes d'une pyramide.



Troisième situation : découpage d'une carte.
Le Centre d'études et d'application pour les nouvelles technologies éducatives a découpé la carte de France comme ci-contre. On s'intéresse aux frontières entre les zones de couleurs différentes.

Exercice 3

Parmi huit élèves volontaires, un professeur de Mathématiques doit constituer un groupe de trois personnes pour faire une interrogation orale. Le professeur doit faire attention aux relations entre élèves :

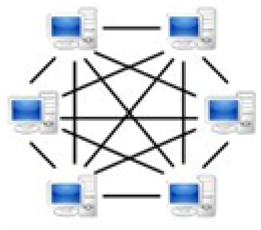
- Erwan ne supporte pas Thibault ;
- Jordan refuse de travailler avec Gwendoline ;
- Thibault n'arrive jamais à rester sérieux avec Alexis ;
- Elodie n'apprécie ni Gwendoline, ni Alim, ni Aya ;
- Alim a du mal à travailler avec Alexis et Aya ;
- Alexis ne veut pas travailler avec Erwan ;
- Aya ne supporte ni Jordan, ni Alim.

1) Construire un graphe non orienté, qui permettra au professeur de constituer deux groupes : un avec Erwan, et un deuxième à constituer parmi les élèves absents du premier groupe.

2) Malgré toutes ces rancœurs entre élèves, le professeur pourrait-il constituer un groupe de quatre élèves ?

Exercice 4

Un réseau d'ordinateurs est représenté ci-contre par un graphe.
Ce graphe est-il complet ?



Exercice 5

Dessiner le graphe complet d'ordre 5. Quel est le degré de chacun des sommets ?
Combien comporte-t-il d'arêtes ?

Propriété 1. ***Somme des degrés d'un graphe***

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale ………………. du nombre total d'arêtes.

Démonstrations : Lorsqu'on ajoute tous les degrés des sommets, on compte le nombre d'arêtes reliées à ces sommets. Chaque arête est ainsi comptée ………………….., car elle est comptée une fois avec chacun des sommets dont elle est issue.

Exercice 6

1) Un hectogone est un polygone à 100 côtés. Avec toutes ses diagonales, l'hectogone forme un graphe. Combien la figure possède-t-elle de segments ?

2) Cinq jeunes souhaitent organiser un tournoi de ping-pong où chaque joueur rencontre trois autres joueurs. Est-ce possible ?

corrigés en vidéo

Définition 3. ***Chaîne et cycle***

Hormis la longueur, les termes définis ci-dessous ne seront valables que pour <u>un graphe non orienté</u>.

• Une chaîne est une …………….. ordonnée d'arêtes telles que l'extrémité d'une arête soit ……………… de la suivante (sauf pour la première et la dernière).

On note une chaîne avec les sommets rencontrés successivement, séparés par des tirets.

• La longueur d'une chaîne est le nombre …………………… la constituant.

• Une chaîne ……………… est une chaîne dont l'origine de la première arête et l'extrémité de la dernière sont le même sommet.

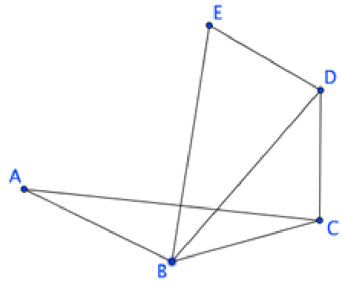
• Un cycle est une chaîne ……………….. dont toutes les arêtes sont ……………

Exemple : Dans le graphe ci-contre,

• A – B – C – D – E est une chaîne de longueur …...

• A – B – E – D – B – A est une chaîne ……………. de longueur …...

• B – C – D – E – B est un ………….. de longueur …...



Considérons maintenant le problème suivant :

Dans un tout petit pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute. Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes ?

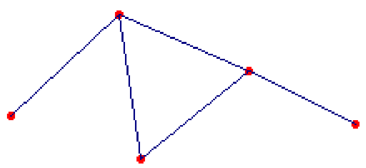
Soit *A* une ville quelconque. L'autoroute nous conduit de la capitale vers au moins 7 villes différentes ; on a donc un réseau de 8 villes reliées par autoroute. De la ville *A* on peut également relier par autoroute au moins 7 autres villes différentes ; on a donc un nouveau réseau de 8 villes reliées par autoroute. Il doit y avoir une ville commune à ces deux réseaux, car sinon le pays aurait au moins 16 villes. La capitale est donc reliée à *A* en au plus deux coups, en passant par cette ville commune ; elle est donc reliée à toutes les autres villes du pays.
Le graphe qui représente la situation précédente sera dit connexe.

Définition 4. ***Graphe connexe***

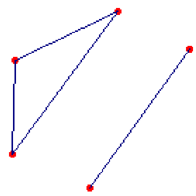
Lorsque, pour chaque ……………. de sommets d'un graphe, il existe une chaîne reliant les deux sommets, le graphe est ………………..

Exemples :

graphe connexe

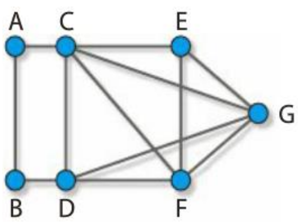


graphe non connexe



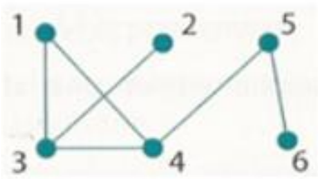
Exercice 7

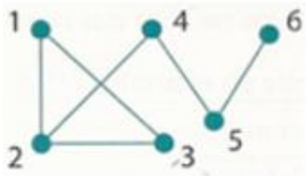
Trouver une chaîne, une chaîne fermée et un cycle dans le graphe ci-dessous.

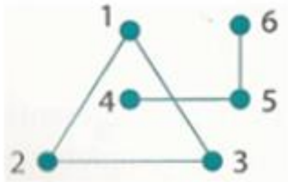


Exercice 8

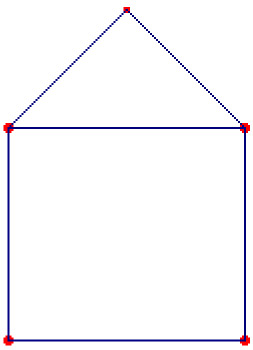
Dire si les graphes sont connexes ou non. *Justifier*.



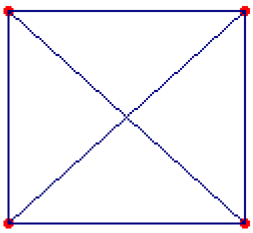




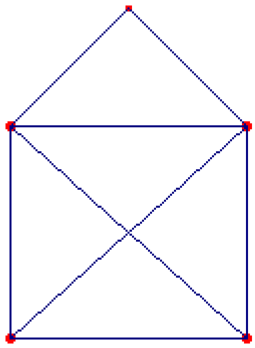
Posons-nous maintenant le problème suivant : « *Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes ci-dessous ?* »



Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3

En faisant des essais, on constate assez vite que ceci est possible pour les graphes 1 et 3, mais apparemment pas pour le graphe 2. Ceci nous conduit à définir :

Définition 5. ***Chaîne eulérienne et cycle eulérien***

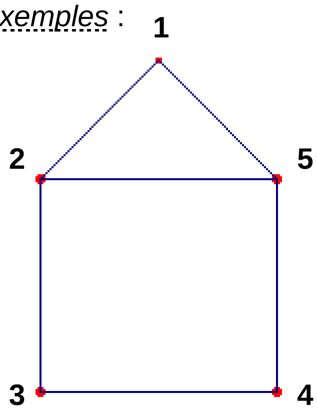
• Une chaîne eulérienne est une chaîne contenant chaque arête du graphe ………. ……………………..

• Un cycle eulérien est un cycle contenant chaque arête du graphe ……….

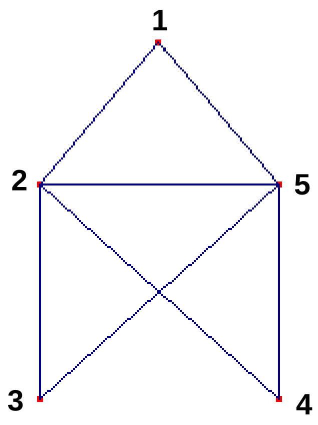
……………………..

Remarque : Dans une chaîne eulérienne, on peut passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

Exemples :



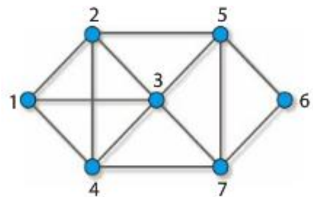
Dans le graphe ci-contre, il est possible de parcourir toutes les arêtes du graphe sans repasser deux fois sur la même, ni lever le crayon, en allant de 2 à 5 :
2 – 1 – 5 – 4 – 3 – 2 – 5, par exemple.
Il existe donc une chaîne eulérienne d'extrémités 2 et 5.



Dans le graphe ci-contre,
2 – 1 – 5 – 4 – 2 – 5 – 3 – 2, est un cycle eulérien.

Exercice 9

Construire une chaîne eulérienne du graphe représenté ci-contre.



Propriété 2. ***Théorème d'Euler***

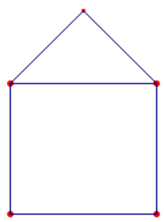
Soit G un graphe non orienté possédant au moins une arête.

• Ce graphe G contient une chaîne eulérienne si et seulement si G est ………….. et contient …………… ou ………. sommets de degré impair.

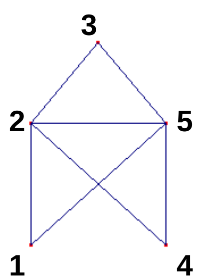
• S'il y a deux sommets a et b de degrés ……………., le chemin va de a à b.

• S'il n'y a pas de sommet de degré impair, il s'agit d'un ……………. eulérien.

Exemples :



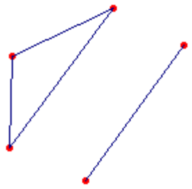
Le graphe ci-contre est connexe, mais il n'admet pas de cycle eulérien car deux de ses sommets sont de degré …………………



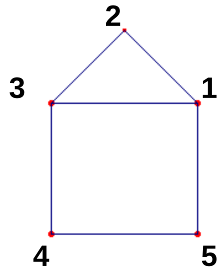
Le graphe ci-contre a tous ses sommets de degré ……………. ; il admet donc un cycle …………………

L'un de ces cycles est, par exemple, le cycle fermé en **3** :

3 – … – … – … – … – … – … – 3.



Le graphe ci-contre n’est pas ……………….. ; il n’admet donc pas de cycle …………………………..

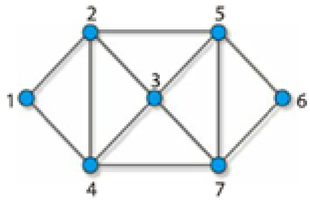


Le graphe ci-contre admet une chaîne eulérienne entre **1** et **3**, car il est ……………….. et, **1** et **3** sont les seuls sommets de degré …………….. Cependant, comme le sommet **2** est de degré ……….., ce graphe n’admet pas de chaîne eulérienne entre **2** et **3**.

Conséquences : • Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
• Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.
• Un graphe qui a plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

Exercice 10

Le graphe représenté ci-contre admet-il un cycle eulérien ?



Exercice 11

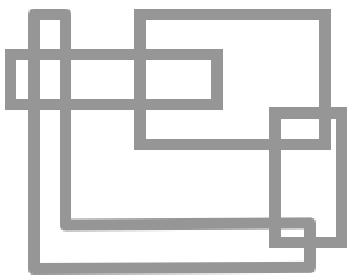
Reprenons le problème des ponts de Königsberg vu dans le **1**.
Est-il possible, à partir d’un des quartiers de la ville, de passer par tous les ponts une et une seule fois ?

Il est aisé de vérifier que les quatre sommets sont de degré impair : il n'existe donc pas de solution au problème !

Exercice 12

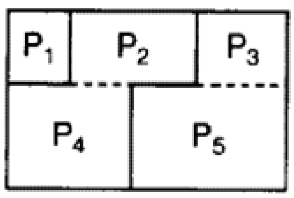
Un agent doit contrôler le stationnement dans un quartier récent dont le plan est donné schématiquement ci-contre.

Peut-il effectuer sa tournée en ne passant qu’une seule fois dans chacune des rues ?



Exercice 13

Cinq pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières. On se propose de résoudre le problème suivant ($\mathscr{P}$) : « Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ? »



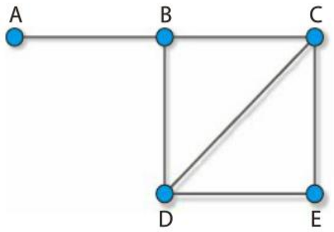
1) Représenter cette situation par un graphe G dans lequel les sommets représentent les pays et les arêtes représentent les frontières.
2) Expliquer pourquoi le problème ($\mathscr{P}$) équivaut au problème suivant : « Le graphe G admet-il un cycle eulérien » ?
3) Résoudre le problème ($\mathscr{P}$).

Définition 6. ***Distance entre deux sommets et diamètre d'un graphe connexe***

• La distance entre deux sommets est la ……………………………… des chaînes reliant ces sommets.

• Le diamètre d'un graphe est la ……………………………… entre deux sommets parmi toutes les paires de sommets.

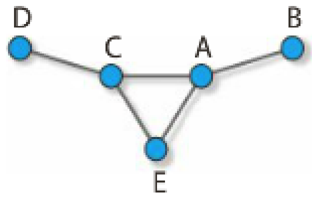
Exercice 14



Dans le graphe ci-contre :

a) Quelle est la longueur de la chaîne $E - C - D - B - A$?
b) Quelle est la distance entre B et E ?
c) Quel est le diamètre du graphe ?

Exercice 15

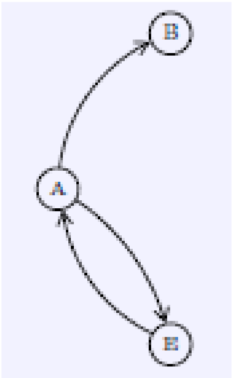


Déterminer le diamètre du graphe « taureau » représenté ci-contre.

3. Graphes orientés

Une exposition est organisée dans un parc, et répartie entre plusieurs secteurs représentés par des lettres.
On décide d'y instaurer un plan de circulation : certaines allées sont à sens unique, d'autres sont à double sens.
Voici le descriptif :

• Sens unique de A vers B ;
• double-sens entre B et C ;
• double-sens entre C et D ;
• sens unique de B vers D ;
• double-sens entre D et E ;
• double-sens entre A et E.



Compléter le schéma ci-contre, selon les descriptions précédentes.

Définition 7. ***Graphe orienté***

• Un graphe orienté d'ordre n est un ensemble de n sommets reliés entre eux par des ……………… nommées arcs. Un sommet peut être relié à lui-même par une ……….

• Le degré d'un sommet est le …………….. d'extrémités et d'origines d'arcs parvenant à ce sommet.

• Un chemin est une …………. ordonnée d'arcs tels que l'extrémité d'un arc soit l'origine du suivant (sauf pour le premier et le dernier). On note un chemin avec les sommets rencontrés successivement, séparés par des tirets.

• La longueur d'un chemin est le ……………… d'arcs le constituant.

• Un chemin fermé est un chemin dont l'origine du premier arc et l'extrémité du dernier sont …………………………….

• Un circuit est un chemin ……………… dont tous les arcs sont ……………...

Exemple :

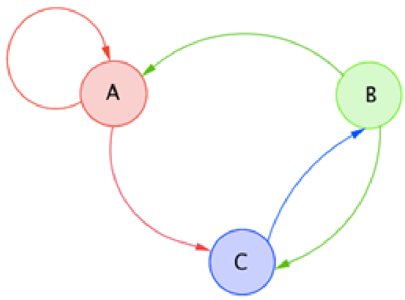
Le graphe orienté ci-contre est d'ordre ….. car il possède ….. sommets.

Il possède une boucle sur le sommet …...

A – C – B est un chemin de longueur …...

B – C – B – A – A – C – B est un chemin ………… de longueur …...

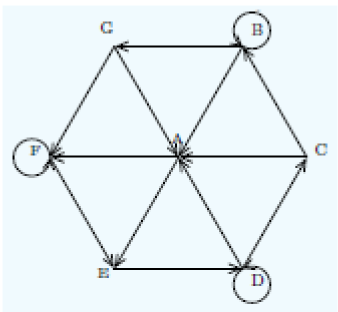
A – C – B – A est un …………. de longueur …...



Exercice 16

On considère le graphe orienté ci-contre.

1) Déterminer l'ordre du graphe, ainsi que le degré de chaque sommet.
2) En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.
3) Déterminer un chemin de longueur 5 reliant G à C.
4) Déterminer un circuit d'origine A.



4. Matrice d’adjacence associée à un graphe

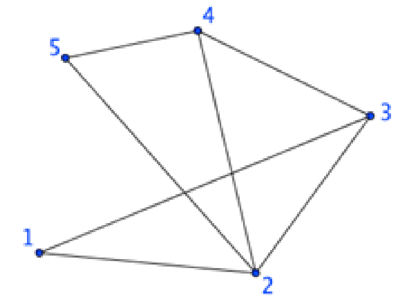
Définition 8. *Matrice d’adjacence associée à un graphe*

La matrice d’adjacence associée à un graphe non orienté d'ordre m est la matrice symétrique de dimension $m \times m$ où le terme à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne vaut k, nombre d'arêtes reliant S_i et S_j.

La matrice d’adjacence associée à un graphe orienté d'ordre m est la matrice de dimension $m \times m$ où le terme à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne vaut 1 s'il y a une arête dont l'origine est S_i et l'extrémité est S_j.

Exemples :

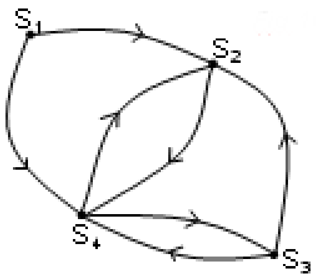
a) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est



b) La La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est

c) $M = \begin{pmatrix} ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \end{pmatrix}$ est la matrice associée au graphe ci-contre.

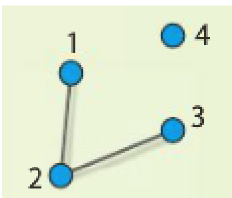
Il y a …… arête qui va de S_2 à S_3.



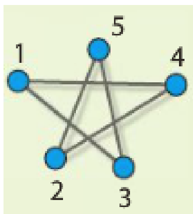
Exercice 17

Pour chacun des exemples suivants, construire la matrice associée au graphe donné.

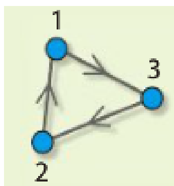
a)



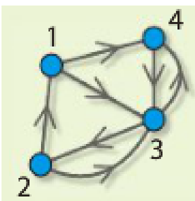
b)



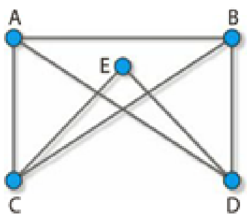
c)



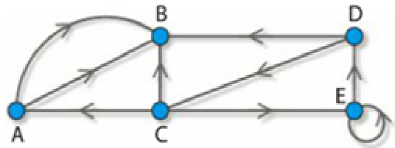
d)



e)



f)



C. Lainé

Exercice 18

Représenter le graphe associé à la matrice ci-contre.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 19

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. *Justifier la réponse*.

On considère le graphe de sommets A, B, C,D et E dont la matrice M est ci-contre :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Ce graphe ne contient pas de boucle.
b) Ce graphe est un graphe orienté.
c) Le degré du premier sommet est 6.
d) Il y a deux arêtes qui partent de B.
e) Il y a deux arêtes qui arrivent à B.
f) Le graphe contient 11 arêtes.

Propriété 3. *Nombre de chaînes de longueur donnée*

Soit M la matrice associée à un graphe G. Le coefficient d'indice a_{ij} de la matrice M^n est le nombre de chaînes de longueur ….. reliant S_i à S_j.

Démonstration : On démontre cette propriété par récurrence.

• *Initialisation* **:** Les chaînes de longueur 1 qui joignent le sommet i au sommet j correspondent directement au coefficient $(a_1)_{ij}$ de la matrice d'adjacence $A = A^1$.

• *Hérédité* **:** Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : le nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient $(a_k)_{ij}$ de la matrice d'adjacence A^k.
Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient $(a_{k+1})_{ij}$ de la matrice d'adjacence A^{k+1}.
Soit un troisième sommet l quelconque.
Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ allant de i à j, tels que la première arête soit $\{i\,;l\}$ correspond au nombre de chaînes de longueur 1 allant de i à l multiplié par le nombre de chaînes de longueur k allant de l à j, soit :

$$c_l = (\text{coefficient } (a_1)_{il} \text{ de la matrice } A) \times (\text{coefficient } (a_k)_{lj} \text{ de la matrice } A^k)$$

Ainsi, le nombre de chaînes de longueur $k+1$ qui joignent deux sommets i à j est égal à la somme des termes c_l pour tous les sommets l, soit le coefficient $(a_{k+1})_{ij}$ de la matrice A^{k+1}.

• *Conclusion :* La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple : Reprenons l'exemple a) de la page 13.
On cherche le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.
À l'aide de la calculatrice, on calcule la matrice A^4.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 & 14 & 9 \\ 13 & 26 & 19 & 19 & 13 \\ 11 & 19 & 19 & 14 & 14 \\ 14 & 19 & 14 & 19 & 11 \\ 9 & 13 & 14 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chaîne de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 3 est égal au coefficient a_{13} ou a_{31} de la matrice A^4.

Ainsi, il existe …… chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.

Par exemple : 1 – 2 – 5 – 4 – 3 ou encore 1 – 2 – 3 – 2 – 3.

Exercice 20

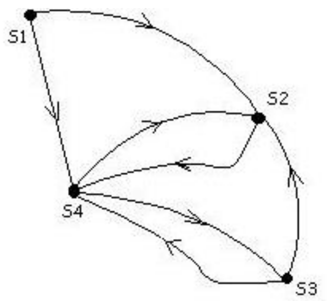
Soit M la matrice ci-contre.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer M^2.
2) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 2 entre A et B ?
3) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 2 entre C et A ?

Exercice 21

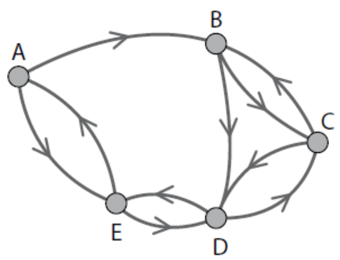
Un parcourt de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc de la ville.
Il est composé de chemins en sens unique, et de quatre points de repère tous distants de 500 mètres, comme indiqué sur la figure ci-dessous.
Tout trajet commence en S1 (entrée) et se termine en S4 (sortie).



Combien y a-t-il de trajets différents de 1,5 km ? 2 km ? 2,5 km ?

Exercice 22

Une exposition est organisée dans un parc. En raison de l'étroitesse des allées, certaines sont à double sens, d'autres à sens unique. Le graphe G ci-contre modélise la situation.



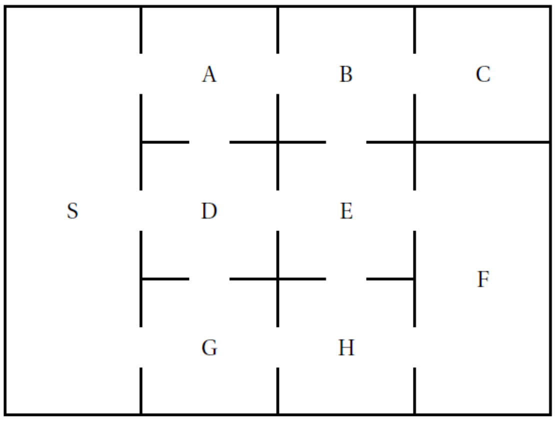
1) Donner la matrice M associée au graphe G, en ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2) Vérifier, à l'aide de la calculatrice, que $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ? Les citer tous.
4) Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 et d'origine A. Quel est ce cycle ?
5) En est-il de même pour le sommet B ?

Exercice 23

Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C,D, E, F, G,H et S.
Le plan du musée est représenté ci-contre.
Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B mais pas dans la salle F.
On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.



1) Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
2) Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ?
3) On note M la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles S, A, B, C, D, E, F, G, H.
Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?

4) On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$.

a) Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de D et reviennent à D ?
b) Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de S et reviennent à C ? Les citer.
c) Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.