CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Dérivation, variations de fonction, théorème des valeurs intermédiaires, convexité, point d'inflexion	*Le 28 janvier 2021*

Exercice 1

1) **La courbe représentative de f admet deux points d'inflexion aux points d'abscisse -2 et 3**. En effet, la fonction f'' change de signe en -2 et en 3.

2) Comme f'' est négative sur $[-2\ ;\ 3]$, alors **la fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 3]$**.

3) La courbe 1 représente une fonction convexe sur $[-2\ ;-1]$, ce qui est contraire à la réponse de la question 2).
La représentation graphique de la fonction f est donc la courbe 2.

Exercice 2

1) a) On a : $f = u \times e^{v}$ avec $u(x) = -2x + 30$ et $v(x) = 0{,}2x - 3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
D'où : $f' = u' \times e^{v} + u \times \left(e^{v}\right)' = u' \times e^{v} + u \times v' \times e^{v}$ avec $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 0{,}2$.

$f'(x) = -2 \times e^{0{,}2x-3} + (-2x+30) \times 0{,}2 \times e^{0{,}2x-3} = \left(-2 + 0{,}2(-2x+30)\right)e^{0{,}2x-3}$ $\boldsymbol{= (-0{,}4x + 4)e^{0{,}2x-3}}$

b) Comme $e^{0{,}2x-3} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-0{,}4x + 4$.
D'où :

x	-20		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$70e^{-7}$	↗	$10e^{-1}$	↘	$-10e$

$f(-20) = (-2 \times (-20) + 30)e^{0{,}2 \times (-20) - 3} = 70e^{-7} \approx 0{,}06$
$f(20) = (-2 \times 20 + 30)e^{0{,}2 \times 20 - 3} = -10e \approx -27{,}18$
$f(10) = (-2 \times 10 + 30)e^{0{,}2 \times 10 - 3} = 10e^{-1} \approx 3{,}68$

2) a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[10\ ;\ 20]$.

-2 appartient à « l'intervalle image » $\left[-10e\ ;\ 3e^{-\frac{7}{3}} + 2\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[10\ ;\ 20]$.
La fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[-20\ ;\ 10]$.

Par conséquent, **l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[10\ ;\ 20]$**.

b) En utilisant la calculatrice, $\boldsymbol{15{,}84 < \alpha < 15{,}85}$.

3) D'après les résultats du logiciel de calcul formel, on obtient l'expression de f'' :
$f''(x)=(-0{,}08x+0{,}4)e^{0{,}2x-3}$.
Etudions le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[-20\ ;\ 20]$.
Comme $e^{0{,}2x-3}>0$, alors le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $-0{,}08x+0{,}4$.
D'où :

x	-20		5		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, **la fonction f est convexe sur $[-20\ ;\ 5]$**.

Comme la fonction f'' change de signe en 5, alors **la courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 5**.

Exercice 3

Partie A

1) $C_m(x)=C'(x)=-\dfrac{1}{48}\times 4x^3+\dfrac{5}{16}\times 3x^2+5=-\dfrac{1}{12}x^3+\dfrac{15}{16}x^2+5$.

Donc $\boldsymbol{C_m(6)}=-\dfrac{1}{12}\times 6^3+\dfrac{15}{16}\times 6^2+5=-\dfrac{216}{12}+\dfrac{540}{16}+5=\dfrac{83}{4}\boldsymbol{=20{,}75}$.

2) a) $\boldsymbol{C''(x)}=-\dfrac{1}{12}\times 3x^2+\dfrac{15}{16}\times 2x+0\boldsymbol{=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{15}{8}x}$**, pour tout réel x de $[0\ ;\ 10]$**.

b) Etudions le signe de $C''(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.

$C''(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{15}{8}x=\dfrac{1}{4}x\left(-x+\dfrac{15}{2}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{4}x\geq 0$ sur $[0\ ;\ 10]$, alors le signe de $C''(x)$ dépend de celui de $-x+\dfrac{15}{2}$.
D'où :

x	0		$7{,}5$		10
$C''(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, **la fonction C est convexe sur $[0\ ;\ 7{,}5]$**.

c) D'après la question précédente, **on peut dire que le point d'abscisse 7,5 est un point d'inflexion de la courbe de la fonction C**.

$C(7{,}5)=-\dfrac{1}{48}\times(7{,}5)^4+\dfrac{5}{16}\times(7{,}5)^3+5\times 7{,}5+10\approx 113{,}418$; donc **le coût total de production de 750 paniers de légumes est égal à environ 11 342 €**.

Partie B

1) **Le producteur doit produire et vendre au moins 70 paniers de légumes afin de réaliser un bénéfice**.

2) D'après le graphique, s'il produit et vend 500 paniers dans le mois, la recette est de 10 000 € et le coût de production d'environ 6 100 euros.
Donc **le producteur réalise un bénéfice d'environ 3 900 € s'il produit et vend 500 paniers dans le mois**.

3) **Le producteur ne peut pas espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois**. En effet, il faudrait un « écart » de 5 unités entre les courbes $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_c$ sur le graphique ; ce qui est impossible.