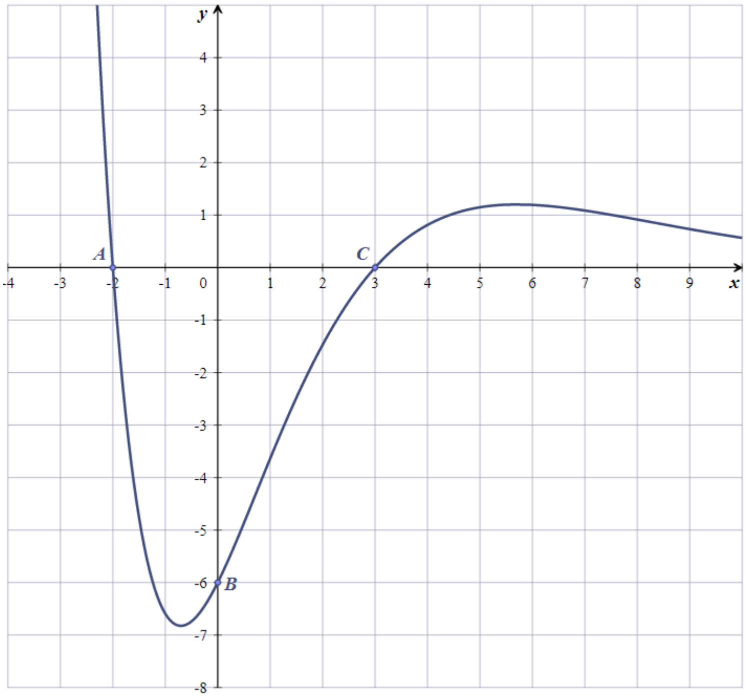
DEVOIR SURVEILLÉ N° 3	
Dérivation, variations de fonction, théorème des valeurs intermédiaires, convexité, point d'inflexion	***Le 28 janvier 2021***

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (4 *points*)

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.

Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2\ ;\ 0)$; $B(0\ ;\ 6)$ et $C(3\ ;\ 0)$.

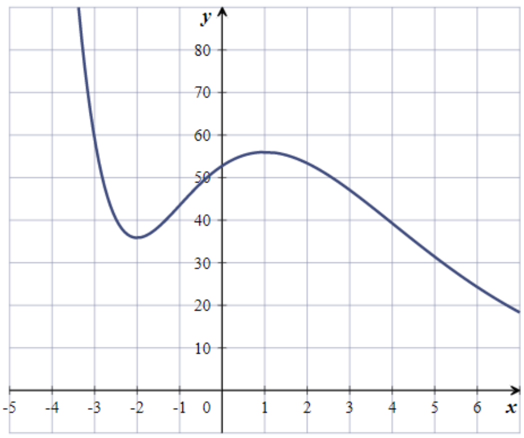


1) La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?

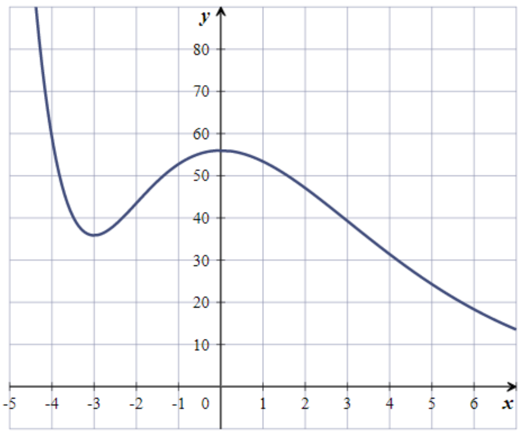
2) Sur $[-2\ ;\ 3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?

3) Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1



Courbe 2



Exercice 2 (8 *points*)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\ ;\ 20]$ par $f(x)=(-2x+30)e^{0,2x-3}$.

1) a) Montrer que $f'(x)=(-0,4x+4)e^{0,2x-3}$ pour tout réel x de $[-20\ ;\ 20]$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-20\ ;\ 20]$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur $[-20\ ;\ 20]$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

3) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10\cdot x+200)\cdot e^{0,2\cdot x+3}$ $(-2\cdot x+30)\cdot e^{0,2\cdot x-3}$
2	Dériver $(2\cdot x+30)\cdot e^{0,2\cdot x-3}$ $(-0,4\cdot x+4)\cdot e^{0,2\cdot x-3}$
3	Dériver $(-0,4\cdot x+4)\cdot e^{0,2\cdot x-3}$ $(-0,08\cdot x+0,4)\cdot e^{0,2\cdot x-3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel : déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Exercice 3 (9 *points*)

Partie A

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par $C(x)=-\dfrac{1}{48}x^4+\dfrac{5}{16}x^3+5x+10$.

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m=C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1) Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.

2) On note C'' la fonction dérivée seconde de C.

a) Déterminer $C''(x)$, pour tout réel x de $[0\ ;\ 10]$.

b) Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\ ;\ a]$ inclus dans $[0\ ;\ 10]$ sur lequel la fonction C est convexe.

c) Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Partie B

On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.

La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_c$ sur le graphique donné ci-dessous.

Par lecture graphique, répondre aux questions qui suivent.

1) Indiquer le nombre minimal de paniers que le producteur doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice. Donner une valeur approchée à la dizaine.

2) Indiquer le bénéfice réalisé par le producteur s'il produit et vend 500 paniers dans le mois. Donner une valeur approchée à la centaine d'euros.

3) Le producteur peut-il espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois ? Argumenter la réponse.