CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 3	
Dérivation, variations de fonction, théorème des valeurs intermédiaires, convexité, point d'inflexion	***Le 4 février 2021***

Exercice 1

1) **La courbe représentative de f admet deux points d'inflexion aux points d'abscisse -2 et 3**. En effet, la fonction f'' change de signe en -2 et en 3.

2) Comme f'' est négative sur $[-2\ ;\ 3]$, alors **la fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 3]$**.

3) La courbe 1 représente une fonction convexe sur $[-2\ ;-1]$, ce qui est contraire à la réponse de la question 2).
La représentation graphique de la fonction f est donc la courbe 2.

Exercice 2

Partie A

1) a) $f'(x)=-3\times x^2+16{,}5\times 2x-30+0$. Donc, **pour tout réel x, $f'(x)=-3x^2+33x-30$**.

b) $\Delta=33^2-4\times(-3)\times(-30)=1089-360=729$.
Comme $\Delta>0$, ce trinôme du second degré admet deux racines :
$x_1=\dfrac{-33-\sqrt{729}}{-6}=\dfrac{-33-27}{-6}=10$ et $x_2=\dfrac{-33+\sqrt{729}}{-6}=\dfrac{-33+27}{-6}=1$.
De plus, $a=-3<0$; on en déduit donc :

x	$-\infty$		1		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent, **la fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$, croissante sur $[1\ ;\ 10]$ et décroissante sur $[10\ ;+\infty[$** .

2) a) $f''(x)=-3\times 2x+33-0$. Donc, **pour tout réel x, $f''(x)=-6x+33$**.

b) $-6x+33=0$ équivaut à $-6x=-33$, c'est-à-dire à $x=\dfrac{-33}{-6}=5{,}5$.
On en déduit que :

x	$-\infty$		5,5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, **la fonction f est convexe sur $]-\infty\ ;\ 5{,}5]$ et concave sur $[5{,}5\ ;+\infty[$** .

Partie B

1) $f(1)=-1+16{,}5-30+110=95{,}5$. Donc **le cours le plus bas de cette action est 95,5 € sur un an**.
$f(10)=-1000+16{,}5\times 100-30\times 10+110=460$. Donc **le cours le plus haut de cette action est 460 € sur un an**.

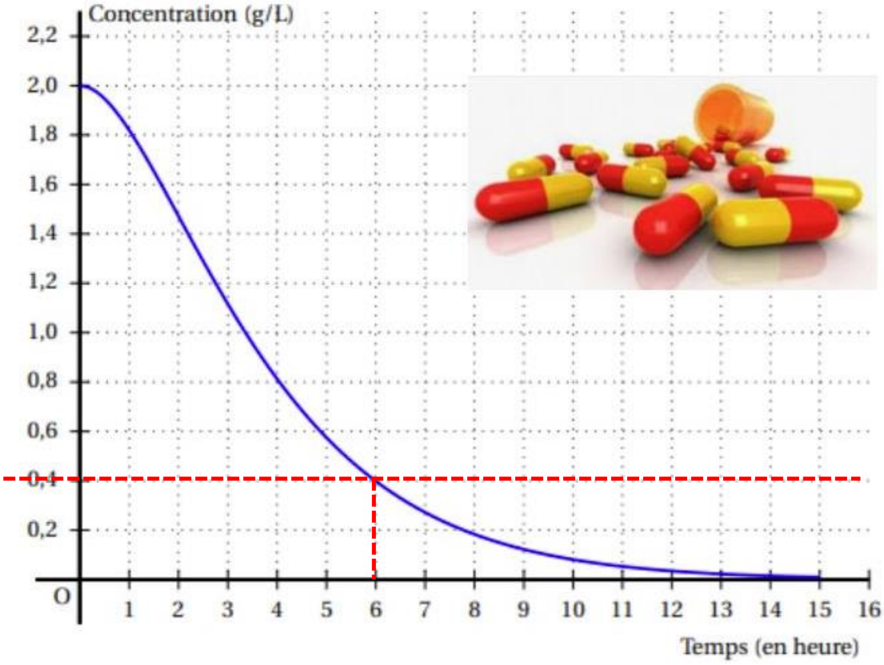
2) La courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 5,5. Donc **la croissance s'est ralentie entre le 5ème et 6ème mois**.

Exercice 3

Partie A : Étude graphique

1) **La concentration à l'instant initial est de 2 grammes par litre**.

2) **La concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre entre l'instant initial et la 6ème heure**.



Partie B : Étude théorique

1) On a : $f = u \times e^{v}$ avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = -0,5x$.

f est dérivable sur $[0 ; 15]$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0 ; 15]$.

D'où : $f' = u' \times e^{v} + u \times \left(e^{v}\right)' = u' \times e^{v} + u \times v' \times e^{v}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -0,5$.

$\boldsymbol{f'(x)} = 1 \times e^{-0,5x} + (x+2) \times (-0,5) \times e^{-0,5x} = \left(1 - 0,5(x+2)\right)e^{-0,5x} \boldsymbol{= -0,5xe^{0,2x-3}}$

Comme $e^{-0,5x} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-0,5x$.
D'où :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ 15
$f'(x)$	0 $\quad\quad$ $-$
f	2 $\searrow$ $10e^{-1}$

$f(0) = (0+2)e^{-0,5\times 0} = 2 \times 1 = 2$

$f(15) = (15+2)e^{-0,5\times 15} = 17e^{-7,55} \approx 0,009$

2) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0 ; 15]$.

0,1 appartient à « l'intervalle image » $\left[17e^{-7,5} ; 2\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 15]$**.

3) En utilisant la calculatrice, **$9,4 < \alpha < 9,5$**.

4) D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}$.
Comme $e^{-0,5x} > 0$, alors le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $0,25x - 0,5$.
D'où :

x	0		2		15
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent, **la fonction *f* est concave sur $[0 ; 2]$ et convexe sur $[2 ; 15]$**.

La courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

Partie C : Interprétation des résultats

1) $15 - 9,5 = 5,5$; donc **le médicament est actif pendant 9h30**.

2) **La baisse de concentration ralentit au bout de 2 heures**.