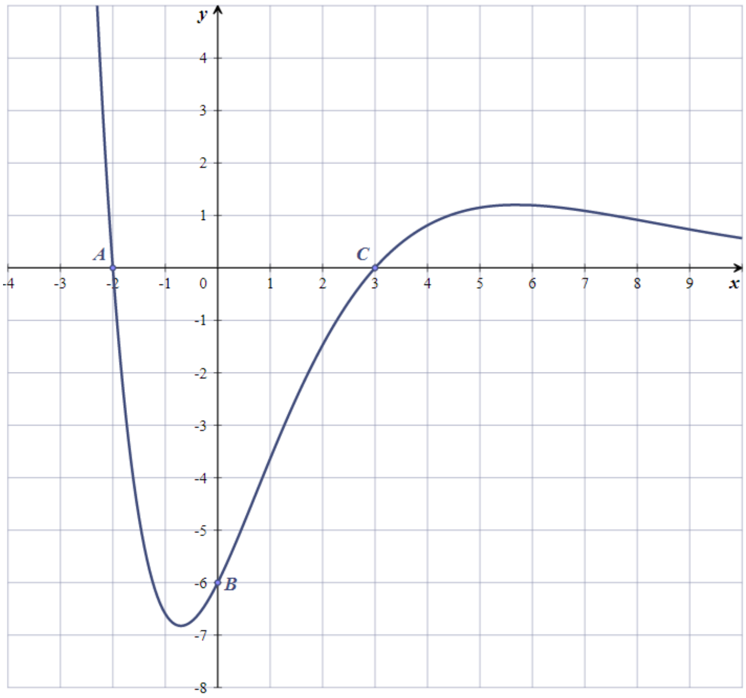
DEVOIR SURVEILLÉ N° 3	
Dérivation, variations de fonction, théorème des valeurs intermédiaires, convexité, point d'inflexion	***Le 4 février 2021***

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (4 *points*)

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.

Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2\ ;\ 0)$; $B(0\ ;\ 6)$ et $C(3\ ;\ 0)$.



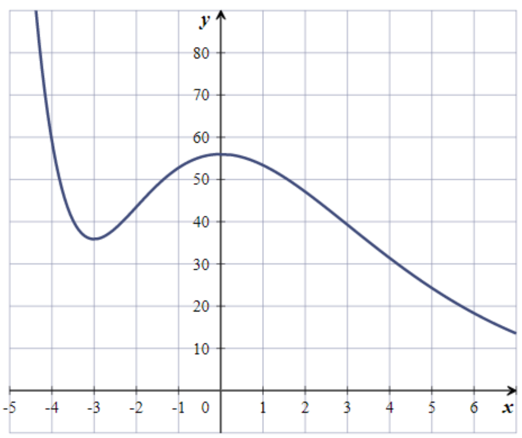
1) La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?

2) Sur $[-2\ ;\ 3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?

3) Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1

Courbe 2



Exercice 2 (7 *points*)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 16{,}5x^2 - 30x + 110$.
On note f' la dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde.

1) a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) a) Déterminer $f''(x)$ pour tout réel x.
   b) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

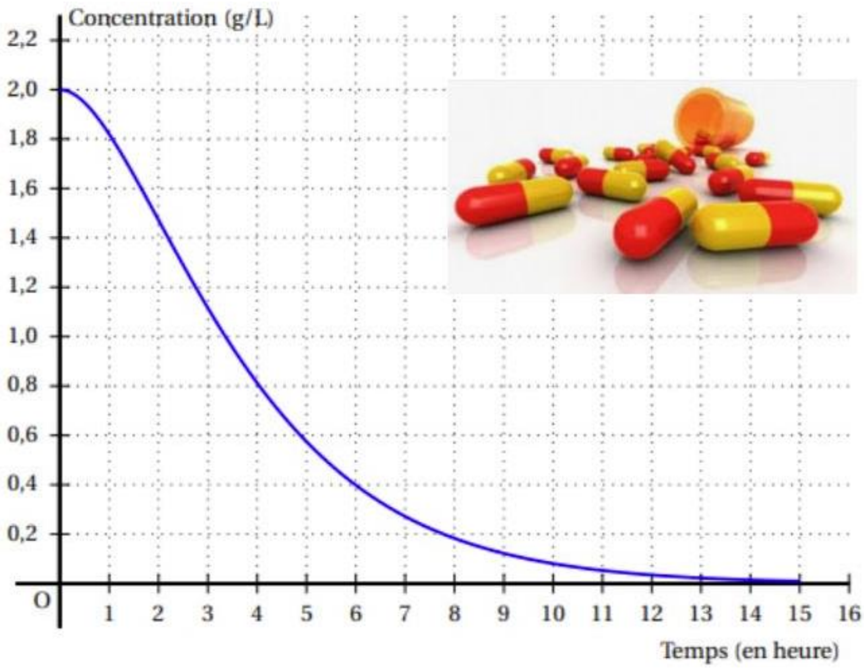
Partie B

La fonction f, définie dans la partie A, modélise sur l'intervalle $[0\ ;\ 12]$, le cours d'une action sur une année.
x est le temps écoulé exprimé en mois et $f(x)$ est le cours de l'action en euros.

1) Sur un an, quel a été le cours le plus bas de cette action ? le cours le plus haut ?
2) À quel moment la croissance du cours de cette action s'est-elle ralentie ?

Exercice 3 (10 *points*)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.



Partie A : Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1) la concentration à l'instant initial ;
2) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

Partie B : Étude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0 ; 15\right]$ par : $f\left(x\right)=\left(x+2\right)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f\left(x\right)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'\left(x\right)=-0,5xe^{-0,5x}$, et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\left[0 ; 15\right]$.

2) Justifier que l'équation $f\left(x\right)=0,1$ admet une unique solution α sur $\left[0 ; 15\right]$.

3) Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4) Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	derivez $((x+2)*\exp(-0.5*x))$
	$\exp(-0.5x)-0.5*\exp(-0.5x)*(x+2)$
2	derivez$(\exp(-0.5*x)-0.5*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2)$
3	factorisez $(-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$(0.25*x-0.5)*\exp(-0.5*x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $\left[0 ; 15\right]$, et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

Partie C : Interprétation des résultats

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2) Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?