CERCLE CIRCONSCRIT
À UN TRIANGLE RECTANGLE

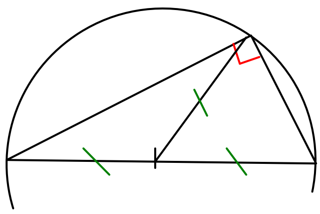
Objectifs :

• *Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du triangle.*

• *Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.*

1. Propriété du cercle circonscrit à un triangle

Si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.



Exemple : *ERT est un triangle rectangle en E. I est le milieu de $[RT]$, J celui de $[RE]$, K celui de $[ET]$. Où est situé le centre du cercle circonscrit à ce triangle ?*

On sait que ERT est un triangle rectangle en E. Donc son hypoténuse est $[RT]$.

Or, si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle ERT.

Remarque : On aurait pu également énoncer la propriété précédente de la façon suivante

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.

Conséquence :

Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

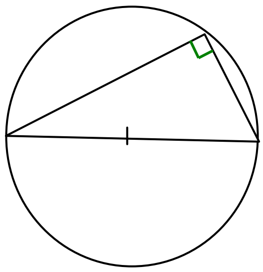
Lorsqu'on parle de la longueur d'une médiane, on pare de la longueur du segment qui joint un sommet et le milieu du côté opposé.

Exemple : *ART est un triangle rectangle en R. I est le milieu de $[AT]$ et $AT = 10$ cm ,*
Quelle est la longueur du segment $[IR]$?

On sait que ART est un triangle rectangle en R. Donc son hypoténuse est $[AT]$.
Or, si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse. Donc $AI = \frac{AT}{2} = 5$ cm .

2. Propriété réciproque

Si un triangle est inscrit dans un cercle dont un diamètre est un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle et le diamètre du cercle est son hypoténuse.



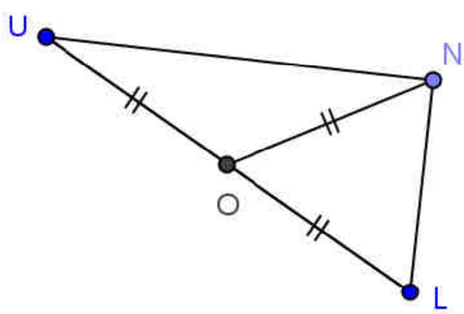
Exemple : *ERT est un triangle. I est le milieu de $[RT]$, J celui de $[RE]$, K celui de $[ET]$*
Le cercle de centre I et de diamètre $[RT]$ passe par T.
Quelle est la nature de ce triangle ?

On sait que le cercle de centre I passe par les trois points du triangle ERT. De plus, l'un des côtés de ce triangle $([RT])$ est un diamètre de ce cercle.
Or, si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle.
Donc ERT est un triangle rectangle en E.

Conséquence :

Si, dans un triangle, la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté relatif à cette médiane, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce côté.

Exemple :



$[NO]$ est une médiane du triangle NUL.

De plus, $NO = UO = LO$ /
Or si, dans un triangle, la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté relatif à cette médiane, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce côté.
Donc le triangle NUL est rectangle en N, et $[UL]$ est son hypoténuse.

C. LAINÉ