DNB - Brevet des Collèges 2015 Asie

22 Juin 2015
Correction

Exercice 1. QCM — 5 points

Question 1 (Réponse C)

L'écriture scientifique du nombre 587 000 000 est :

A. **B.** **C.** $5,87 \times 10^8$

Définition 1

L'écriture scientifique d'un nombre N s'exprime sous la forme du produit d'un décimal A compris entre 1 et 10 (10 exclu) et d'une puissance de 10 :

$$\boxed{N = A \times 10^n} \text{ avec : } \begin{cases} A & \in [1\,;\,10[\\ n & \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ici on a :

$$587\,000\,000 = 587 \times 10^6 = \underline{5,87 \times 10^8}$$

Question 2 (Réponse A)

Si on développe et réduit l'expression $(x+2)(3x-1)$ on obtient :

A. $3x^2 + 5x - 2$ **B.** **C.**

On a :

$$(x+2)(3x-1) = 3x^2 - x + 6x - 2$$
$$(x+2)(3x-1) = \underline{3x^2 + 5x - 2}$$

La bonne réponse est donc la réponse 2A.

Question 3 (Réponse C)

Dans un parking, il y a des motos et des voitures. On compte 28 véhicules et 80 roues, il y a donc :

A. 20 voitures **B.** 16 voitures **C.** 12 voitures

On peut tester les valeurs proposées ou résoudre un système.

- Avec 20 voitures, soit $28 - 20 = 8$ motos cela donne un nombre de roues de :

$$20 \times 4 + 8 \times 2 = 93 \neq 80$$

- Avec 16 voitures, soit $28 - 16 = 12$ motos cela donne un nombre de roues de :

$$16 \times 4 + 12 \times 2 = 88 \neq 80$$

- Avec 12 voitures, soit $28 - 12 = 16$ motos cela donne un nombre de roues de :

$$12 \times 4 + 16 \times 2 = 80$$

La bonne réponse est donc la réponse 3C.

Question 4 (Réponse B)

Le produit de 18 facteurs égaux à -8 s'écrit :

A. -8^{18} **B.** $(-8)^{18}$ **C.** $18 \times (-8)$

Le produit de 18 facteurs égaux à -8 s'écrit $(-8)^{18}$, la bonne réponse est donc la réponse 4B.

Question 5 (Réponse A)

La section d'un cylindre de révolution de diamètre 4 cm et de hauteur 10 cm par un plan parallèle à son axe est :

A. un rectangle de dimension 3 cm et 10 cm **B.** un rectangle de dimension 2 cm et 10 cm **C.** un rectangle de dimension 3 cm et 8 cm

La section d'un cylindre de révolution de diamètre 4 cm et de hauteur 10 cm par un plan parallèle à son axe peut être un rectangle de dimensions 3 cm et 10 cm.
la bonne réponse est donc la réponse 4A.

Exercice 2. Pythagore — 5 points

En moyenne un piéton met 9 secondes pour parcourir 10 mètre. Combien de temps Julien a-t-il gagné en traversant sans utiliser le passage piéton ?

- **Calculons FJ**
  Dans le triangle KFJ rectangle en K, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$FJ^2 = KF^2 + KJ^2$$
$$FJ^2 = 8^2 + 15^2$$
$$FJ^2 = 64 + 225$$
$$FJ^2 = 289$$

  Or FJ est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$FJ = \sqrt{289}$$
$$FJ = 17 \text{ m}$$

- **Calcul du temps pour parcourir FJ**.
  La quatrième proportionnelle peut ici être utilisée :

Distance (m)	10 m	17 m
Temps (s)	9 s	?

  On a

$$\frac{17 \times 9}{10} = 15,3 \text{ s}$$

  Donc le Julien va mettre 15,3 seconde pour parcourir les 17 m de F à J.
- **Calcul du temps pour parcourir** $FK + KF$.
  Si il utilise la passage piéton, la distance parcourue devient :

$$FK + KJ = 8 + 15 = 23 \text{ m}$$

  Il va donc mettre : $\dfrac{23 \times 9}{10} = \underline{20,7 \text{ s}}$.

Distance (m)	10 m	22 m
Temps (s)	9 s	?

- **Calcul du temps gagné**.
  Julien a donc gagné $\underline{20,7 - 15,3 = 5,4 \text{ secondes}}$.

©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Probabilités — 4 points

Un bus transporte des élèves. Il y a 10 joueurs de ping-pong, 12 coureurs de fond et 18 gymnastes. Lors d'un arrêt, ils sortent du bus en désordre.

1. Quelle est la probabilité que le premier sportif à sortir soit un joueur de ping-pong.

On suppose qu'il y a *équiprobabilité*.
Sur les $10 + 12 + 18 = 40$ sportifs dans le bus, il y a 10 joueurs de ping-pong donc la probabilité que le premier sportif à sortir soit un joueur de ping-pong est :

$$\boxed{p_1 = \frac{10}{40} = 0,25}$$

2. Quelle est la probabilité que le premier sportif à sortir soit un coureur ou un gymnaste.

Sur les 40 sportifs dans le bus, il y a 12 coureurs de fond et 18 gymnastes donc la probabilité que le premier sportif à sortir soit un coureur ou un gymnaste :

$$\boxed{p_2 = \frac{12+18}{40} = 0,75}$$

Remarque : l'évènement « le premier sportif à sortir soit un coureur ou un gymnaste » est l'évènement contraire de l'évènement de la première question. On retrouve bien alors que :

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,25 = 0,75$$

3. Après cet arrêt, ils remontent dans le bus et accueillent un groupe de nageurs. Sachant que la probabilité que ce soit un nageur qui descende du bus en premier est de 1/5, déterminer le nombre de nageurs.

On appelle n le nombre de nageurs.
Sur les $(40 + n)$ sportifs dans le bus, il y a n nageurs donc la probabilité que le premier sportif à sortir soit un nageurs est :

$$p_3 = \frac{n}{40+n} = \frac{1}{5}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{n}{40+n} = \frac{1}{5} &\iff \frac{n}{40+n} = \frac{1}{5} \\ &\iff \frac{n}{40+n} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Donc on obtient par "produit en croix"

$$\begin{aligned} \frac{n}{40+n} = \frac{1}{5} &\iff 5n = 40 + n \\ &\iff 4n = 40 \\ &\iff n = \frac{40}{4} = 10 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{n}{40+n} = \frac{1}{5} \iff n = 10}$$

Il y avait 10 nageurs dans le bus.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. PGCD — 3 points

A la fin d'une fête, tous les enfants présents se partagent équitablement 397 ballons qui ont servi à la décoration. Il reste 37 ballons.
L'année suivante, les mêmes enfants se partagent les 598 ballons utilisés cette année-là. Il en reste 13.
Combien d'enfants au maximum étaient réunis ?

Notons N le nombre d'enfants.

- **Analyse des données**
  - La première années, il reste 37 ballons donc les N enfants se partagent équitablement $397 - 37 = 360$ ballons. L'entier N *est donc un diviseur de 360*.
  - La deuxième années, il reste 13 ballons donc les N enfants se partagent équitablement $598 - 13 = 585$ ballons. L'entier N *est donc aussi un diviseur de 585*.
  - L'entier N est donc un diviseur commun de 360 et de 585, or on cherche le plus grand entier N possible, de ce fait N est le PGCD de 360 et de 585.
- **Calcul du PGCD**
  Calculons par l'algorithme d'EUCLIDE le PGCD des nombres 585 et 360.
  Cet algorithme porte le nom du célèbre mathématicien grec *Euclide de Samos* (vers 300 av. J.-C.), auteur des « *Éléments* ».
  Il est basé sur la propriété suivante :

Propriété 1

Pour a, b entiers tels que $a \geq b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b :

$$\text{PGCD}\,(a\ ;\ b) = \text{PGCD}\,(b\ ;\ r)$$

Par divisions euclidiennes successives on obtient :

$$585 = 360 \times 1 + 225$$
$$360 = 225 \times 1 + 135$$
$$225 = 135 \times 1 + 90$$
$$135 = 90 \times 1 + 45$$
$$90 = 45 \times 2 + 0$$

Le PGCD des nombres 585 et 360 est le dernier reste non nul du procédé, c'est-à-dire 45.

$$\boxed{\text{PGCD}\,(585\ ;\ 360) = 45}$$

- **Conclusion**
  Au maximum, 45 enfants étaient réunis chaque année.

©ISSN 2272-5318

Exercice 5. Trigonométrie — 7 points

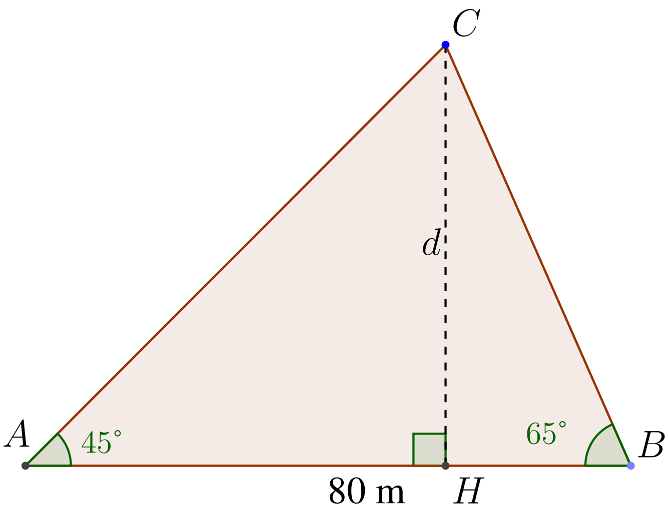
1. Conjecture

Mise au point par le célèbre mathématicien grec Thalès (600 av. J.-C.), la méthode dite de TRIANGULATION propose une solution pour estimer la distance d.

1. a. Faire un dessin à l'échelle 1/1000 (1 cm pour 10 m).

A l'échelle 1/1000, les mesures des angles sont évidement inchangés et la distance L est représentée par un segment de longueur

$$\frac{80}{1000} = 0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$$



1. b. Conjecturer en mesurant sur le schéma la distance d séparant le bateau de la côte.

Graphiquement, on a $CH \approx 5,5$ cm donc $d \approx 55$ mètres.

2. Détermination de la distance d par le calcul.

2. a. Expliquez pourquoi la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ est de 70°.

Dans un triangle, la somme des angles donne un angle plat (de mesure 180°) donc ici :

$$\widehat{ACB} = 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CBA} = 180° - 45° - 65°$$

Donc

$$\boxed{\widehat{ACB} = 70°}$$

2. b. Dans tout triangle ABC, on a la relation appelée « loi des sinus »

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}}$$

En utilisant cette formule calculer BC. Arrondir au cm près.

En remplaçant par les valeurs dans la formule on obtient :

$$\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{80}{\sin 70°} = \frac{AC}{\sin 65)}$$

Puis par "produit en croix" :

$$\boxed{BC = \frac{80 \times \sin 45°}{\sin 70°} \approx 60,20 \text{ m}}$$

2. c. En déduire CH arrondie au cm près.

Dans le triangle CBH rectangle en H on a :

$$\sin \widehat{B} = \frac{CH}{BC} \Longleftrightarrow CH = \sin 65° \times BC$$

Donc arrondie au cm près

$$\boxed{CH \approx 54,56 \text{ m}}$$

Exercice 6. Tableur et fonction — 7 points

1. Utiliser le tableur pour déterminer la valeur de $h(-2)$.
La valeur de $h(-2)$ se lit dans la cellule $C4$ du tableau soit : $\underline{h(-2) = -17}$

2. Écrire les calculs montrant que : $g(-3) = 47$.
On a définie la fonction g, pour tout réel x par $g(x) = 3x^2 - 9x - 7$ donc :

$$\begin{aligned}
g(-3) &= 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) - 7 \\
g(-3) &= 3 \times 9 + 27 - 7 \\
g(-3) &= 27 + 27 - 7 \\
g(-3) &= \underline{47}
\end{aligned}$$

3. Faire une phrase avec le mot « antécédent » ou le mot « image » pour traduire l'égalité $g(-3) = 47$.
L'égalité $g(-3) = 47$ peut se traduire par :

- « l'*image* de (-3) par g est 47 » ;
- ou « un *antécédent* de 47 par g est (-3) » ;

4. Quelle formule Pauline a-t-elle saisie dan la cellule $B4$?
En $B4$ Pauline doit calculer l'image du nombre de la cellule $B1$ (soit -3) par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5x - 7$.
Elle a donc écrit :

$$\boxed{= 5 * B1 - 7}$$

5.

5. a. Déduire du tableau une solution de l'équation : $3x^2 - 9x - 7 = 5x - 7$.
On cherche dans le tableau les valeurs de x (ligne 1) qui ont la même image par les fonctions g et h.
Une solution de cette équation est donc $\underline{x = 0}$.

5. b. Cette équation a-t-elle une autre solution ?
On va résoudre cette équation en la factorisant :

$$\begin{aligned}
3x^2 - 9x - 7 = 5x - 7 &\iff 3x^2 - 14x = 0 \\
&\iff x \times (3x - 14) = 0
\end{aligned}$$

On se ramène alors à une équation produit nul or par théorème :

> **Théorème 1**
>
> Un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

De ce fait :

$$\begin{array}{l|c|l}
\begin{aligned} 3x - 14 = 0 &\iff 3x = -14 \\ &\iff x = -\dfrac{14}{3} \end{aligned} & \text{ou} & x = 0
\end{array}$$

Les solutions sont $\boxed{-\dfrac{14}{3} \text{ et } 0}$, l'équation admet bien une autre solution.

©ISSN 2272-5318

Exercice 7. Sphère et volume — 5 points

1. Le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule :

$$\boldsymbol{\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h)}$$

1. a. Prouver que la valeur exacte du volume en cm^3 de l'aquarium est de 1296π.

L'aquarium est une calotte sphérique formé d'une sphère de rayon $r = 10$ cm, et de hauteur $h = 18$ cm. Donc en appliquant la formule donnée on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h) \\
\mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} \times 18^2 \times (3 \times 10 - 18) \\
\mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} \times 18^2 \times 12 \\
\mathcal{V} &= \frac{18^2 \times (3 \times 4) \times \pi}{3} \\
\mathcal{V} &= 18^2 \times 4 \times \pi
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{V} = 1296\pi}$$

1. b. Donner la valeur approchée de l'aquarium au litre près.

$$\boxed{\mathcal{V} = 1296\pi \approx 4\,071{,}50 \text{ cm}^3 \approx \underline{4 \text{ L}}}$$

2. On remplit cet aquarium à ras bord, puis on verse la totalité de son contenu dans un autre aquarium parallélépipédique. La base du nouvel aquarium est un rectangle de 15 cm par 20 cm.
Déterminer la hauteur atteinte par l'eau (on arrondira au cm).

Le volume d'un parallélépipède rectangle est obtenu en faisant le produit de l'aire de sa base par sa hauteur h.

La base du nouvel aquarium est un rectangle de 15 cm par 20 cm, donc en notant h la hauteur atteinte par l'eau, elle occupera un volume de :

$$V = 15 \times 20 \times h = 300h$$

On cherche donc h tel que $V = 4$ L mais attention ici, il faut repasser en cm^3 et en valeur exacte pour respecter la cohérence des unités :

$$V = 300h = 1296\pi \iff h = \frac{1296\pi}{300} \approx 13,57 \text{ cm}$$

La hauteur atteinte par l'eau, arrondie au cm, est donc de $\underline{14 \text{ cm}}$.

- Fin du devoir -

©ISSN 2272-5318