ministère éducation nationale

ÉduSCOL [dgesco]

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Mathématiques
Collège

Projet de document d'accompagnement

- du numérique au littéral -

Février 2008

eduscol.education.fr/ D0015/

DU NUMÉRIQUE AU LITTÉRAL

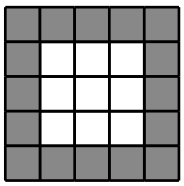
Un des objectifs de l'enseignement mathématique au collège est que le calcul littéral prenne place dans les moyens d'expression et de résolution de problèmes disponibles pour les élèves, au côté du calcul numérique, des figures, des représentations graphiques. Dans cette optique, il s'agit d'installer progressivement l'habitude de recourir au calcul littéral, le programme s'organisant autour de quelques lignes directrices :
- en 6e et 5e, initiation à l'usage des lettres, dans des situations où leur utilité peut être reconnue par les élèves, notamment au travers de l'élaboration et l'utilisation de formules ;
- en 4e et 3e, initiation à la résolution de problèmes par des méthodes algébriques liées souvent à l'utilisation de fonctions.

1. Les différents usages des lettres

A l'école élémentaire et au début du collège, la lettre est utilisée comme symbole d'unité (h, m…), pour désigner un objet précis (un point A, le nombre π…), pour désigner une grandeur ou une mesure dans une formule. Elle a alors souvent valeur d'abréviation : dans A = L x l, A est souvent interprété comme une abréviation de *aire*, L de *longueur*, l de *largeur* ; dans P = π x D, P est alors interprété comme abréviation de *périmètre* et D de *diamètre*. Au collège, la lettre acquiert de nouveaux statuts qui restent souvent implicites pour l'élève :

Celui de variable. La rencontre de la lettre comme variable est très précoce, dès l'utilisation de formules. La valeur de certaines lettres dépend alors des valeurs attribuées aux autres. La résolution de certains problèmes et l'utilisation d'un tableur sont particulièrement propices à un travail sur cet usage des lettres.

Exemple de problème : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.[1]



Dans un premier temps, les élèves sont invités à déterminer le nombre de carreaux grisés pour des valeurs déterminées du nombre de carreaux sur le côté du carré, puis dans un second temps à formuler en langage naturel une méthode de calcul et dans un dernier temps à produire une formule mathématique. La nécessité d'avoir à désigner le nombre de carreaux sur le côté justifie l'emploi d'une lettre. Les méthodes de calcul utilisées et par conséquent les formules produites sont diverses. Voici quelques exemples de formules que sont susceptibles de produire des élèves de 6e. Si n désigne le nombre de carreaux sur le côté du carré et N le nombre de carreaux grisés :
$N = 4n - 4$ $N = 2n + 2(n - 2)$ $N = 4(n - 1)$
$N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$
Et à un autre niveau de classe : $N = n^2 - (n - 2)^2$

L'utilisation d'un tableur est une autre occasion de donner du sens à la notion de variable dans la mesure où dans l'édition d'une formule, ce sont les adresses des cellules qui sont prises en compte et non leurs contenus du moment. Le fait de modifier le contenu d'une cellule désignée dans la formule modifie le contenu de la cellule où est implantée la formule, le contenu de cette cellule apparaît ainsi fonction des contenus des cellules présentes dans la formule.
Ainsi le tableur peut, dans la résolution de problèmes, être utilisé pour déterminer le prix TTC d'une série d'articles assujettis au même taux de TVA, 5,5% par exemple, et contribuer à illustrer les notions de fonction et de variable. Après avoir nommé « Prix HT » la première colonne, « Taxe » la deuxième colonne et « Prix TTC » la troisième colonne, dans la cellule A2, on entre le prix HT d'un article, dans la cellule B2 la formule = A2*5,5:100 et dans la cellule C2 la formule =A2+B2.

Celui d'indéterminée. La lettre ne représente plus des nombres particuliers, mais au contraire des nombres quelconques comme dans les identités telles que $k(a + b) = ka + kb$ où l'égalité est universellement vraie. Il est important que ce caractère d'universalité soit mentionné sans toutefois faire appel aux quantificateurs, mais sous des formes accessibles aux élèves, comme « Pour toutes les valeurs données aux lettres *a*, *b*, *k*, on a $k(a + b) = ka + kb$ ».
Dans le problème du nombre de carreaux grisés, la diversité des méthodes de calcul et des formules produites amène la question de l'équivalence des expressions. Celle-ci peut-être testée sur des valeurs numériques avant d'être prouvée en ayant recours au calcul littéral. Dans les transformations d'écritures ainsi effectuées, la lettre n acquiert le statut d'indéterminée symbolisant un nombre quelconque.

Celui d'inconnue. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs qui, substituées à l'inconnue, donnent une égalité vraie. La notion de solution d'une équation, pour être comprise, nécessite une remise en cause du statut du signe d'égalité jusque-là installé. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, comme c'était le cas en arithmétique, il apparaît dans des énoncés qui peuvent être rendus faux. Cette utilisation du signe d'égalité heurte l'habitude installée en mathématiques de sous-entendre le vrai : quand on écrit une égalité, il convient d'entendre « l'égalité est vraie ». La compréhension de ce qu'est une solution d'une équation en recourant à des tests de la valeur de vérité de l'égalité est un préalable à l'apprentissage de techniques de résolution d'une équation.
Un prolongement à la situation du nombre de carreaux grisés consiste à poser le problème de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal par exemple à 112 ou à 74.
Dès la classe de 5e, le tableur peut être utilisé pour tester des valeurs et ainsi déterminer si un nombre est solution d'une équation. Multiplier les essais, tirer des informations de premiers essais pour en effectuer de nouveaux en vue de trouver un nombre pour lequel l'égalité est vérifiée est une activité qui contribue à donner du sens à la notion de solution d'une équation et à installer un nouveau statut du signe d'égalité. Le recours à une démarche par essais et ajustements ou l'utilisation d'un tableur pour trouver des solutions d'une équation présentent des limites (nombre de tentatives, accessibilité des solutions, incertitude sur l'exhaustivité des résultats), ce qui va justifier l'étude de techniques de résolution (voir le § 4).

Celui de paramètre. La lettre représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres qui ont :
- soit le statut de variable comme dans la définition de la fonction linéaire de coefficient *a* déterminée par $x \mapsto ax$ où *x* désigne la variable et *a* un nombre déterminé ;
- soit le statut d'inconnue comme dans la désignation d'une

[1] Situation extraite de « Les débuts de l'algèbre au collège », INRP (1996)

équation du second degré à une inconnue qui est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où x désigne l'inconnue, a, b, et c des nombres déterminés, ou au collège quand l'enseignant précise que toute équation du premier degré à une inconnue peut se ramener à une équation de la forme $ax = b$;
- soit le statut d'indéterminée comme dans l'énonciation du fait que toute expression du premier degré peut être écrite sous la forme $ax + b$.
Au collège, l'utilisation de paramètres est peu fréquente en mathématique, ce qui n'est pas le cas en sciences physiques. Par exemple pour exprimer à partir de la formule U = RI l'intensité en fonction de la résistance pour une tension donnée, l'attribution d'une valeur numérique à U n'intervient qu'après transformation de la formule. Dans ce travail de la formule, la lettre U a alors le statut de paramètre.

A propos de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré quand le nombre de carreaux hachurés est connu, l'existence de solution dépend des valeurs attribuées à ce dernier nombre. Un prolongement à ce problème consiste à déterminer des valeurs du nombre N de carreaux grisés pour lequel le problème a une solution, ce qui peut conduire à discuter par exemple l'existence d'une solution à l'équation $4n - 4 = N$ *où la lettre N a alors le statut de paramètre.*

Pour une même expression, le statut de la lettre varie en fonction de la tâche. Ainsi, dans le problème de la détermination du nombre de carreaux grisés en fonction du nombre de carreaux sur le côté du carré :
- la lettre a le statut de variable lorsque dans la formule $N = 4(n - 1)$, n est remplacée par une valeur numérique ;
- la lettre a le statut d'indéterminée lorsqu'il s'agit par exemple de prouver l'équivalence des expressions $4(n - 1)$ et $4n - 4$;
- la lettre a le statut d'inconnue lorsqu'il s'agit de déterminer le nombre de carreaux sur le côté du carré quand le nombre de carreaux grisés est connu, c'est le cas dans la résolution de l'équation $4(n - 1) = 112$.
Au cours de la résolution d'un problème, le statut de la lettre évolue. Ainsi dans la résolution de $4(n - 1) = 112$, le remplacement de cette équation par l'équation équivalente $4n - 4 = 112$, nécessite d'opérer la transformation d'écriture de $4(n - 1)$ en $4n - 4$. Dans cette transformation, le statut de la lettre n est passé de façon temporaire de celui d'inconnue qu'elle avait dans l'équation à celui d'indéterminée.
Les désignations des différents statuts de la lettre présentés ici sont à destination de l'enseignant. Si ce vocabulaire ne doit pas être un enjeu d'enseignement, il est essentiel que les élèves sachent distinguer en situation les rôles différents joués par les lettres.

2. Les différents statuts du signe « = »

Le signe « = » est introduit très tôt à l'école primaire et, au cours de la scolarité, il est utilisé avec plusieurs significations qui sont rarement explicitées avec les élèves.

A l'école élémentaire
- Le signe « = » est le plus souvent utilisé pour annoncer un résultat, comme par exemple dans 8 + 13 = 21. Le signe « = » est alors lu comme signifiant « ça donne », « ça fait », et il apparaît comme étant orienté « gauche-droite ». Des écritures comme 2,3 + 3,8 = 6,1 – 1,5 = 4,6, produites à l'occasion de la résolution d'un problème, témoignent de cette conception. Cette signification correspond à celle de la touche [=] des calculatrices ordinaires.
- Le signe « = » est encore utilisé pour communiquer la décomposition d'un nombre. C'est le cas lorsque l'élève décompose un nombre sous forme de produit (36 = 4 x 9) ou, plus fréquemment lorsqu'il décompose un nombre, entier ou décimal, suivant les puissances de la base dans notre système de numération décimale. Ainsi l'égalité 2304 = 2 x 1000 + 3 x 100 + 4 traduit que 2304 c'est deux milliers, 3 centaines et 4 unités. De même l'égalité $2{,}73 = 2 + 7 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$ traduit que 2,73 c'est 2 unités, 7 dixièmes et 3 centièmes.
- Enfin, mais plus rarement, le signe « = » est utilisé pour signifier que deux écritures représentent un même nombre. Ainsi, lorsque les élèves ont à placer le nombre $\frac{7}{4}$ sur une demi-droite graduée en quarts, ils peuvent voir $\frac{7}{4}$ comme étant quatre quarts plus trois quarts, c'est-à-dire une unité et trois quarts, ou encore comme étant huit quarts moins un quart, c'est-à-dire deux unités moins un quart, et écrire $1 + \frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{4}$ Le signe d'égalité exprime alors une relation symétrique et transitive.

Au collège
- L'emploi du signe « = » comme symbole exprimant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique devient prédominant, notamment pour les expressions littérales, comme par exemple $a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.
- Le signe « = » est également utilisé pour traduire une identité. Il signifie alors que quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs « retournées » par les deux expressions figurant de part et d'autre du signe « = » sont égales. Il rend compte de l'universalité d'un énoncé comme par exemple $k(a + b) = ka + kb$.
- Le signe « = » acquiert encore un autre statut dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, il apparaît dans des énoncés dont on se demande s'ils peuvent être rendus vrais. En substituant à l'inconnue une valeur numérique, on obtient une égalité qui est ou bien vraie ou bien fausse. Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs qui substituées à l'inconnue donnent une égalité vraie. Cet usage du signe « = » apparaît en rupture avec l'utilisation qui en était faite jusque là et qui sous-entendait le vrai.
- Enfin, le signe « = » est utilisé comme symbole d'affectation, comme par exemple lorsque qu'on se propose de calculer $a + 2b$ pour $a = 1{,}3$ et $b = 0{,}7$.

3. Formules et introduction des lettres

La production d'une formule apparaît comme une réponse à la question de la description générale d'une situation faisant intervenir des valeurs numériques particulières et l'utilisation de lettres permet de résoudre le problème de la désignation des variables en jeu dans la situation.
Le travail sur les formules, première rencontre avec les expressions algébriques, est l'occasion de mettre l'accent sur ces expressions et de les « démystifier ». Elles apparaissent alors comme la traduction des méthodes de calcul mises en œuvre par les élèves. Ainsi, dans l'exemple des carreaux grisés sur le pourtour du carré, différentes méthodes de calcul existent :
- découpage du contour grisé en quatre bandes dont la longueur de chacune d'elle est égale au nombre de carreaux sur le côté du carré moins un, qui conduit à l'expression $4(n - 1)$;
- découpage du contour grisé en quatre bandes dont la longueur de chacune d'elle est égale au nombre de carreaux sur le côté du carré mais alors, chaque carreau de coin est comptabilisé deux fois. Cette méthode conduit à l'expression $4n - 4$;
- aire d'une surface vue comme la différence de deux surfaces carrées, l'une de côté n et l'autre de côté $n - 2$, qui conduit à l'expression $n^2 - (n - 2)^2$.
Il y a bien des façons de désigner le nombre de carreaux sur le côté : par un symbole, par une lettre… Le choix de recourir à

une lettre est le fruit d'une convention. Dans la classe, l'utilisation par les élèves de lettres différentes pour désigner une même variable est un point d'appui important pour montrer que le choix des lettres n'a pas d'influence sur la solution du problème.
L'élaboration d'une méthode de calcul préalable à la production d'une formule représente une économie qui évite d'avoir à repenser le problème à chaque nouvelle valeur attribuée à la variable. Une fois la formule produite, il est utile de la faire « fonctionner » pour différentes valeurs pour en faire percevoir le caractère économique.

Pour les élèves qui s'orienteront vers l'enseignement professionnel, la fréquentation du calcul littéral se fera pour une bonne part à travers l'utilisation de formules. Le travail sur les formules, qu'il s'agisse d'en exploiter ou d'en produire, permet très tôt au collège un premier contact avec des expressions littérales, sans que les élèves soient confrontés aux difficultés spécifiques de la démarche algébrique mentionnées au paragraphe 3. Des situations comme l'expression du nombre de sommets, du nombre d'arêtes ou encore du nombre de faces d'un prisme droit en fonction du nombre de sommets du polygone de base, sont facilement accessibles. Après avoir résolu le problème pour quelques prismes particuliers pour lesquels le recours au solide permet de valider les réponses, les élèves peuvent être confrontés au problème de l'élaboration d'une méthode de calcul pour n'importe quel prisme droit et de la production de la formule qui lui correspond.

A l'occasion de la résolution de problèmes, les élèves sont conduits à manipuler des formules[2] et ainsi à faire fonctionner le calcul littéral pour :
- calculer une valeur quand les autres sont connues, comme par exemple en sciences physiques, la détermination de la valeur de I à partir de la formule P = UI quand les valeurs de P et U sont connues ou bien encore de *v* à partir de la formule $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ quand les valeurs de E_c et *m* sont connues.
- passer d'une égalité à une autre, comme par exemple de $d = vt$ à $v = \frac{d}{t}$;
- prouver l'équivalence de deux ou plusieurs expressions comme dans le cas par exemple de la détermination du « milieu de deux nombres » *a* et *b* : $a + \frac{b - a}{2}$ et. $\frac{a + b}{2}$

4. Résolution algébrique d'un problème

A l'école élémentaire, l'élève n'opère que sur des nombres ou des grandeurs en mettant en œuvre un raisonnement arithmétique dans lequel il progresse du connu vers l'inconnu et où chaque étape peut être contrôlée en référence au contexte de la situation. La langue naturelle y est le support du raisonnement et l'écrit est principalement utilisé pour effectuer les calculs, rendre compte du raisonnement utilisé et exprimer des réponses. C'est dans ce contexte que le signe d'égalité est le plus souvent utilisé comme indicateur d'un calcul à effectuer, ce qui lui confère une orientation gauche - droite, les résultats devant être exprimés sous forme canonique réduite, ainsi l'expression 4 + 8 ne saurait figurer comme réponse à 2 + 2 + 5 + 3, le calcul étant considéré comme inachevé. Tant que subsiste un symbole opératoire, le travail n'est pas achevé.

[2] Les situations de la vie quotidienne ou encore empruntées aux autres disciplines, font rarement intervenir une seule variable : I = (R x 0,2826) – (2683,39 x N) calcul de l'impôt pour une tranche d'imposition donnée, U = RI en sciences physiques, V = L x l x h, alors que les compétences visées en calcul littéral au terme du collège portent pour l'essentiel sur des expressions où intervient une seule lettre. Un travail sur les formules qui font bien souvent intervenir plus d'une variable permet d'éviter cette vision réductrice du calcul littéral.

Toutefois, il arrive en arithmétique qu'un élève soit amené à remplacer un nombre par une écriture de ce nombre où intervient une opération et dans ce cas à utiliser le signe d'égalité comme symbole d'équivalence.
Dans une résolution algébrique, la démarche est inversée. Les quantités inconnues sont désignées par des lettres et les relations entre connu et inconnu sont établies avant d'engager les calculs qui conduiront au résultat. Les calculs s'effectuent sur les lettres (représentant les quantités inconnues) au même titre que sur les nombres qui expriment les quantités connues. Ils consistent en des transformations d'écriture légitimées, non plus en référence à la situation traitée, mais par des règles formelles.
Ainsi, dans le cas de la détermination du « milieu de deux nombres » a et b quand a et b sont positifs et b > a, si les élèves peuvent donner sens aux deux expressions $a + \frac{b - a}{2}$ *et* $\frac{a + b}{2}$ *en recourant à une interprétation géométrique au moyen d'une droite graduée, les traitements effectués à partir de* $a + \frac{b - a}{2}$ *pour en montrer l'équivalence avec* $\frac{a + b}{2}$ *sont difficilement interprétables sur la droite graduée.*

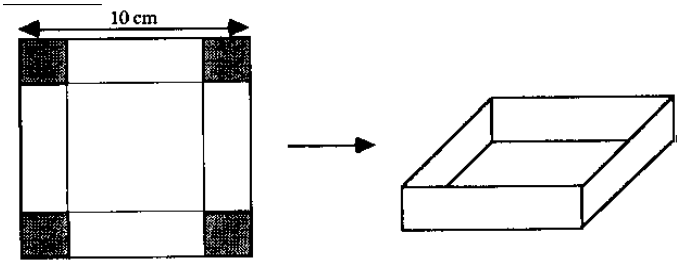
Dans une résolution algébrique, l'exécution et le contrôle des calculs nécessitent que soient maîtrisées la structure des expressions littérales (somme, produit, quotient) ainsi que les règles de traitement sur celles-ci. Par ailleurs, le signe d'égalité doit être perçu comme une relation symétrique.
La démarche algébrique nécessite ainsi une remise en cause profonde des stratégies de résolution antérieures et de la signification du signe « = ». Le passage du calcul numérique au calcul algébrique constitue une véritable rupture que l'enseignant doit rendre visible à l'élève. *Après qu'un problème a été résolu par une démarche algébrique, un retour sur la méthode de résolution permet d'en dégager les spécificités par rapport à une démarche arithmétique : désignation de quantités ou de mesures inconnues par des lettres, calcul sur les lettres comme si elles désignaient des quantités ou des mesures connues, écriture d'une égalité ou d'une inégalité pour lesquelles la suite du travail consiste à déterminer les valeurs à attribuer aux lettres pour qu'elles soient vraies…*
Considérons les deux situations suivantes :
1. Je pense un nombre, je le multiplie par 3. Au résultat obtenu je retranche 12, j'obtiens alors 7,5. Quel est le nombre pensé ?
2. Alice et Bertrand[3] *disposent chacun d une calculatrice. Ils affichent un même nombre sur leur calculatrice.*
Alice multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 4 au résultat obtenu.
Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 7 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?
Dans la première situation, un raisonnement arithmétique utilisant la réversibilité de l'action conduit immédiatement à la solution : en ajoutant 12 à 7,5, l'élève obtient le triple du nombre pensé. Il lui suffit alors de diviser le résultat obtenu par 3. Le raisonnement chemine du connu vers l'inconnu.
Dans la seconde situation, ce cheminement n'est plus possible. L'élève va devoir expliciter le calcul effectué par chaque enfant à partir du nombre affiché au départ sur la calculatrice. Pour cela, il va lui falloir désigner ce nombre ; en mathématiques il est *d'usage de recourir à une lettre. L'élève produit ainsi une équation : 3x + 4 = 2x + 7. Pour en*

[3] Situation extraite de : COMBIER G., GUILLAUME J.-C., PRESSIAT A., « Les débuts de l'algèbre au collège », INRP (1996)

trouver la solution, il va soit procéder par essais successifs car la solution est ici facilement accessible, soit remplacer l'équation par une équation équivalente plus simple à résoudre en utilisant les règles institutionnalisées liant égalité et opérations et en opérant sur des expressions désignant des « quantités » inconnues. Sur ces deux points, il s'agit d'une rupture avec sa pratique antérieure qu'il ne faut pas minimiser.

Trop souvent, les exemples proposés pour introduire la mise en équation se ramènent à une équation de la forme $ax + b = c$ et peuvent être résolus par l'arithmétique[4]. Montrer le fonctionnement de la démarche algébrique sur ce type de problèmes ne permet pas à l'élève d'en percevoir la puissance et l'intérêt. Pour aider les élèves à accepter une autre approche qu'arithmétique de la résolution de problèmes, il est nécessaire de les confronter à des difficultés qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. Ainsi, proposer un problème où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation, comme dans l'exemple d'« Alice et Bertrand » qui conduit à une équation de la forme $ax + b = cx + d$, permet dans un premier temps, de mettre en oeuvre des procédures par essais et ajustements. En faisant varier les nombres a, b, c et d, l'obtention de la solution par cette démarche devient de plus en plus difficile voire impossible. Ainsi :
Pour a = 3, $b = 4$, $c = 2$ et $d = 7$, la solution (3) est facilement accessible en procédant par essais et ajustements.
Pour a = 7, $b = 3$, $c = 2$ et $d = 15$, la solution (2,4) est encore accessible en procédant par essais et ajustements, mais plus difficilement.
Pour a = 26, $b = 22$, $c = 6$ et $d = 149$, la recherche « à la main » de la solution (6,35), par essais et ajustements, devient problématique. Elle est possible à l'aide d'un tableur à condition toutefois de bien gérer les essais.
Pour a = 11, $b = 5$, $c = 4$ et $d = 9$, la solution $(\frac{4}{7})$ est quasiment inaccessible « à la main » et l'utilisation d'un tableur permet tout au plus d'en donner une valeur approchée.
Avant que les élèves disposent de techniques de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, la recherche de la solution à ce problème peut avantageusement être effectuée à l'aide d'un tableur en comparant les résultats calculés pour les expressions algébriques figurant dans chaque membre de l'équation pour une même valeur attribuée à la variable. Un exemple est développé en annexe. Ce type d'activité peut être conduit en classe de 4e ou de 3e sur des équations de degré quelconque que les élèves auront obtenues à la suite de la mise en équation d'un problème.

La résolution algébrique d'un problème se caractérise par :
- une phase de mise en équation qui nécessite de repérer une grandeur qui va pouvoir s'exprimer de deux façons différentes. Dans l'exemple d'« Alice et Bertrand », cette grandeur est le nombre qu'obtiennent Alice et Bertrand sur leur calculatrice au terme du calcul. A propos du nombre de carreaux grisés sur le pourtour du carré, « Trouver le nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal à 112 » nécessite d'exprimer le nombre de carreaux grisés sous sa forme numérique 112 ainsi que sous la forme d'une expression algébrique faisant intervenir le nombre n de carreaux sur le côté du carré. Le traitement de l'énoncé nécessite le respect des règles d'écriture mathématique.
- une phase de résolution de l'équation ou des équations écrites qui engage un traitement formel sans lien avec la situation.
- une phase de restitution de la solution dans le contexte du problème.
Assumer successivement les deux premières tâches pour un débutant qui ne maîtrise pas plus l'une que l'autre, constitue une charge de travail importante. L'utilisation en classe d'un outil de calcul formel, permet de mettre l'accent sur le traitement de l'énoncé et de différer le travail des techniques de résolution tout en donnant à l'élève la possibilité de résoudre en début d'apprentissage des problèmes autres que du premier degré à une inconnue, mais pas plus difficiles à mettre en équation, comme par exemple dans le problème suivant proposé en classe de 4e :
On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque, on découpe un carré comme indiqué sur le dessin. On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
Quelle doit être la mesure du côté du carré que l'on découpe dans chaque coin pour que le volume de la boîte soit 72 cm³ ?



En permettant la résolution de systèmes, l'utilisation d'un outil de calcul formel autorise l'introduction d'inconnues auxiliaires qui facilite la mise en équation et que seul l'expert, qui dispose d'une gamme de problèmes de référence, sait ne pas être indispensable.
Dans le problème de la boîte, on voit ainsi des élèves introduire les variables suivantes :
a la mesure des côtés des carrés découpés dans les coins ;
c la mesure du côté du fond de la boîte ;
V le volume de la boîte;
et écrire cette suite d'équations pour rendre compte du problème :
$c = 10 - 2a$; $V = c^2 \times a$ et $V = 72$

L'apprentissage de techniques de résolution d'équations ou d'inéquations s'en trouve ensuite motivé du fait que les élèves ne disposent pas personnellement d'un outil de calcul formel. Cet apprentissage amène la question de la substitution d'une équation à une autre en recourant :
- soit à l'équivalence des égalités ($a = b$ équivaut à $a + c = b + c$ et $a = b$ équivaut à $ac = bc$ si $c \neq 0$), auquel cas le raisonnement mis en œuvre permet d'affirmer que les solutions trouvées sont effectivement solutions de l'équation de départ.
- soit à l'implication ($a = b$ implique $a + c = b + c$ et $a = b$ implique $ac = bc$), auquel cas, pour être complet, le raisonnement nécessite, comme pour un problème de construction, de tester les valeurs trouvées pour déterminer les solutions effectives de l'équation.
La logique qui sous-tend les deux types de raisonnement est difficilement accessible aux élèves. La première démarche ne saurait être utilisée sans que soient mises en place les équivalences assurant la conservation de toutes les solutions des équations successives, et pour cela que ces équivalences aient été démontrées.
La seconde démarche nécessite deux temps : recherche des valeurs possibles de x (conditions nécessaires), puis vérification que les valeurs obtenues conviennent (conditions suffisantes). L'enseignant doit exiger des élèves ce deuxième temps, mais il doit éviter de le présenter comme un moyen de s'assurer de l'absence d'erreurs dans les calculs faits lors du

[4] Le programme de calcul (Cf. paragraphe 5) que traduit l expression $ax + b$ est en effet facilement « inversible » : à c on soustrait b, et ensuite on divise le nombre ainsi obtenu par a. On résout ainsi le problème sans recourir à une mise en équation.

premier temps. Cette seconde démarche présente l'avantage d'entretenir les compétences des élèves en calcul numérique.

5. Les deux aspects d'une expression algébrique : « procédural » et « structural »

Une même expression peut être considérée de deux points de vue :
- soit elle exprime un programme de calcul : elle indique une suite d'opérations qu'il faut effectuer afin d'obtenir le nombre que « retourne » le programme de calcul quand on donne des valeurs numériques aux lettres qui y figurent ; on évoque alors le caractère « procédural » de l'expression ;
- soit elle est considérée comme un objet dont on peut décrire la forme et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs (réduction, factorisation, développement, substitution dans une autre expression, ...) ; on évoque alors le caractère « structural » de l'expression.

Les expressions algébriques sont introduites et très largement utilisées au collège sous leur aspect « procédural », pour formaliser, pour mathématiser un programme de calcul (voir les paragraphes 1 et 3). Les élèves sont alors confrontés au type de tâches suivant : évaluer l'expression algébrique lorsqu'on donne aux variables qui y figurent des valeurs numériques. Le qualificatif « procédural » résume le caractère à la fois « dynamique, séquentiel et détaillé »[5] que revêt l'expression algébrique. Cet aspect procédural est également sollicité lors d'un test d'égalité comportant un ou deux nombres indéterminés (programme de 5e). Les règles de priorités opératoires sont largement utilisées.

Les expressions algébriques n'ont pas pour seul but de formaliser des programmes de calcul. Elles constituent également des objets avec lesquels on peut faire des calculs sans remplacer les lettres par des nombres, calculs qui sont donc des *calculs sur des programmes de calcul*[6]. Un des types de problèmes qui conduit à considérer cet aspect « structural » des expressions algébriques est le suivant : on veut savoir si deux programmes de calcul relatifs à une même variable sont équivalents, c'est-à-dire s'ils « retournent » toujours les mêmes valeurs quand on « rentre » n'importe quelle valeur. Si la réponse est négative, elle est facile à justifier. Mais quelle justification fournir dans le cas où la réponse est affirmative ? Par exemple, comment justifier que les programmes de calcul « $4n - 4$ », « $n + 2(n - 1) + (n - 2)$ », « $n^2 - (n - 2)^2$ »… sont équivalents ? On peut expérimenter en utilisant un tableur pour faire afficher les valeurs retournées par ces trois programmes pour une liste de valeurs de n. Mais comment prouver que le résultat demeure pour n'importe quelle valeur de n ? On peut y arriver en utilisant des règles de calcul qui garantissent l'équivalence des programmes de calcul que les expressions traduisent, au rang desquelles figure la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, résultat que l'on admet dès la classe de 5e. Ces équivalences de programmes se traduisent par des identités algébriques, qui sont déduites d'identités algébriques admises pour certaines (distributivité…), démontrées pour d'autres (double distributivité, identités remarquables).

Dans ce type de travail, c'est bien l'aspect « structural » qui est sollicité, par opposition à l'aspect « procédural ». Cette fois-ci, il s'agit de considérer l'expression comme une forme, que l'on peut décrire ; le qualificatif « structural » résume le caractère à la fois « statique, instantané et intégral »[7], qui s'oppose terme à terme au caractère « dynamique, séquentiel et détaillé » évoqué plus haut. Ainsi, du point de vue « procédural », pour évaluer $a + bc$ pour $a = 5$, $b = -3$, $c = 2$, il convient de savoir quelles opérations effectuer et dans quel ordre : la multiplication est ici prioritaire. Du point de vue « structural » $a + bc$ est d'emblée perçu comme une somme (en référence à l'assembleur de plus haut niveau figurant dans l'expression, qui correspond à la dernière opération que l'on ferait si on évaluait l'expression pour des valeurs données aux lettres).

La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». Pour rééquilibrer l'enseignement des deux aspects, l'étude du type de problèmes « Les programmes de calcul que traduisent deux expressions algébriques sont-ils équivalents ? » permet de motiver le travail « structural » sur les expressions algébriques, qui nécessite l'identification de la forme d'une expression et souvent le changement de cette forme (trans-formation), selon le but poursuivi. On est alors conduit à apprendre aux élèves à déterminer la forme d'une expression, selon des catégories qui évoluent au cours de l'enseignement. Savoir si une expression est une somme ou un produit est une tâche incontournable, que l'élève doit à terme savoir faire seul, sans indication de la part du professeur ou de l'énoncé de l'exercice.

Plusieurs activités peuvent aider les élèves à faire la distinction entre ces deux aspects d'une expression algébrique :
- La description en langue naturelle d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » : par exemple, énoncer que $(3x - 1)(x^2 + 2)$ est le *produit* d'une différence et d'une somme, différence du produit de 3 et de x et 1 et somme du carré de x et de 2, ou que $3x^2 + 3x$ est la somme du produit de 3 et du carré de x et du produit de 3 et de x. Le premier nom de la phrase ainsi construite donne la forme de l'expression (il n'est donc pas indispensable de la produire entièrement). Inversement, l'explicitation orale de la suite des opérations à effectuer pour exécuter le calcul met en évidence l'aspect « procédural » de l'expression. On peut faire un parallèle, en géométrie, avec la description d'une figure (aspect « structural ») et un programme de construction qui permet de la réaliser (aspect « procédural »).
- L'usage d'un arbre : la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect « procédural »), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect « structural »).
- L'usage du tableur : les étapes successives permettant d'élaborer une formule relèvent de l'aspect « procédural » alors que la nature de l'opération inscrite dans la dernière cellule donne la forme de l'expression (aspect « structural »).
- …

Ce qui précède montre la difficulté à distinguer le travail sur l aspect «procédural » de celui sur l aspect «structural » et fait apparaître une des raisons pour lesquelles, dans l'enseignement, le deuxième est souvent écrasé par le premier.

Une expression algébrique traduit un programme de calcul, mais elle permet également de décrire des nombres. Cette « fonction désignative ou descriptive »[8] d une expression algébrique est par exemple sollicitée dans l'écriture $2k + 1$,

[5] Sfard A. 1991, On the dual Nature of mathematical Conceptions : Reflexions on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, Educational Stidies in Mathematics 22 (1), 1-36, cité dans la thèse de Caroline Bardini (2003) : *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*, Université Paris 7, page 24.

[6] Selon la formulation due à Yves Chevallard, Séminaire PLC2 2004-2005, qui propose de définir l'algèbre élémentaire comme la science des programmes de calcul. L emploi de programmes de calculs dans l enseignement de l algèbre est par ailleurs développé dans la thèse de Dominique Brouin (2002), *Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires*, Université Bordeaux I.

[7] Cf. note 3.

[8] Expression introduite par Tarski (1971), dans le premier chapitre de son *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars.

expression qui décrit les nombres entiers impairs, qui apparaissent en tant que nombres « retournés » par le programme de calcul que constitue cette expression, dès que l on remplace la variable *k* par un nombre entier naturel.

Après qu une transformation d expression algébrique (factorisation, développement, réduction, &) a été faite, un type de tâches doit faire l objet d une meilleure visibilité pour les élèves : comment contrôler qu elle a été faite sans erreur?
Il est souhaitable d'aider les élèves à se doter de moyens de contrôle économiques du développement ou de la factorisation d'une expression auquel l'expert recourt constamment, comme, par exemple, la vérification du coefficient de plus haut degré ou du terme constant. Il faut aussi en montrer les limites qui justifient le recours à des tests sur un nombre restreint de valeurs bien choisies. Le recours à une calculatrice pour effectuer des tests sur des valeurs numériques en facilite la validation. En classe, le professeur peut montrer l'usage du tableur pour contrôler l'exactitude de l'égalité $(3x – 1)(2x + 5) = 6x^2 + 13x – 5$: on entre une valeur de x, dans la cellule A1, l'expression $(3x - 1)(2x + 5)$ dans la cellule B1 et l'expression $6x^2 + 13x – 5$ dans la cellule C1 (en recourant par exemple à l'outil fonction). Si le développement est exact, en faisant varier la valeur attribuée à x dans la cellule A1, les valeurs numériques qui s'affichent dans les cellules B1 et C1 varient également, mais restent égales. Il est important que les élèves soient conscients que ce type de contrôle conduit à penser que deux expressions sont effectivement égales sans toutefois en avoir la certitude (des critères permettant de l'obtenir seront étudiés plus tard).. En revanche, le fait que pour une valeur attribuée à x, il n'y ait pas égalité des valeurs des deux expressions suffit à prouver qu'elles ne sont pas égales.

6. Le calcul littéral et la démonstration

Le domaine des nombres entiers, familier aux élèves, permet de mettre en évidence dans la seconde moitié du collège la puissance du calcul littéral. En particulier, son utilité pour rendre compte d une forme (somme, produit&) ou d une propriété d un nombre peut être mise en évidence. C est ce que nous avons désigné par l « aspect structural » des écritures littérales. Ainsi, la question peut être posée de la désignation du suivant d un nombre, d un nombre pair, d un nombre impair, d un multiple d un nombre donné, de trois nombres consécutifs. Le tableur permet de vérifier que l'écriture proposée convient pour un grand nombre de valeurs.

Pour ce faire, il suffit d'entrer une valeur entière dans une cellule et dans une autre cellule la formule sensée produire le nombre suivant, un nombre pair, un nombre impair, un multiple d'un nombre donné…

Dans le cadre numérique, mieux qu'en géométrie, les élèves sont à même de concevoir l'infinité des cas possibles et, après un travail sur la notion d'exemple et de contre-exemple, d'appréhender la nécessité de disposer d'outils de preuve. Ainsi le calcul littéral permet de prouver des résultats sur les nombres entiers, notamment les propriétés de divisibilité comme « La somme de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre ». L'aspect « structural » d'une expression qui est alors particulièrement sollicité.
Le calcul littéral est également sollicité pour justifier ou établir des règles, comme celle dite du « produit en croix » ou encore les règles de calcul sur les écritures fractionnaires en mobilisant la notion de quotient installée en classe de 6e. Par exemple en classe de 4e, la règle de sommation de deux quotients en écritures fractionnaires de même dénominateur, installée en classe de 5e, peut être démontrée :

On veut démontrer que $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Désignons par Q le quotient $\frac{a}{b}$ *et par Q' le quotient.* $\frac{c}{b}$.

On veut donc démontrer que Q + Q' est égal à $\frac{a+c}{b}$*, c'est-à-dire, par définition d'un quotient que a + c = b(Q + Q').*
Or d'après cette même définition, puisque Q est le quotient de a par b : a = bQ.
De même, c = bQ'. Donc a + c = bQ + bQ'.
Or bQ + bQ' = b(Q + Q'). D'où le résultat …
On peut diminuer dans un premier temps le nombre de lettres utilisées en traitant un exemple générique (par exemple, en prenant $b = 7$). Après avoir fait le raisonnement pour cet exemple, le professeur fait remarquer que l on peut remplacer 7 par n importe quel nombre non nul, désigné par la lettre *b*.

Si la démonstration de propriétés comme par exemple « La somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3 » peut être confiée aux élèves, d'autres, comme celles utilisant la notion de quotient, sont conduites par l'enseignant devant les élèves ou largement guidées par celui-ci.

Eléments pour une programmation des apprentissages au collège

Le programme décrit les compétences construites à chaque niveau de classe, mais les activités à un niveau donné ne sauraient se réduire au travail de ces seules compétences. Avant même de faire l'objet d'un apprentissage structuré, ces compétences font l'objet d'une première approche à l'occasion de la résolution de problèmes. Un aspect travaillé à un niveau donné est repris, consolidé et enrichi dans les classes suivantes. Ce tableau, qui ne vise pas l'exhaustivité, se veut une aide aux enseignants pour programmer les apprentissages sur les quatre années du collège.

	6e	5e	4e	3e
Statut de la lettre rencontré *Les statuts n'ont pas à faire l'objet d'une explicitation devant les élèves*	Variable	Indéterminée	Inconnue	Paramètre
Travail sur les formules	•Utilisation de formules pour : - déterminer une grandeur dépendant d'autres grandeurs ; - déterminer par des procédures personnelles et dans des cas simples la valeur attribuée à une variable quand toutes les autres valeurs sont connues. •Production de formules à une ou deux variables en réponse à la difficulté de formulation d'une méthode de calcul dans la langue naturelle.	Le travail engagé en 6e sur les formules, qui n'était qu'une approche, devient un objectif du programme en 5e.		•Utilisation de l'expression littérale d'une fonction linéaire ou affine.
Résolution algébrique d'un problème			•Mise en évidence des limites d'une résolution arithmétique. •Introduction d'une lettre pour désigner une valeur inconnue. •Mise en équation d'un problème en introduisant au besoin des inconnues auxiliaires.	•Mise en équation et résolution d'un problème conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue, un système de deux équations du premier degré à une inconnue, à une équation de la forme $A(x).B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degré
Résolution d'équations, d'inéquations	•Utilisation d'égalités à trou. •Première approche de la notion de solution d'une équation, notamment à l'occasion du travail sur la notion de quotient non décimal. L'emploi du mot équation n'est pas indispensable.	•Notion de solution d'une équation : tester à l'occasion de la résolution de problèmes si une égalité où figure un ou deux nombres indéterminés est vrai quand on leur attribue des valeurs numériques.	•Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.	•Résolution d'un système de deux équations du premier degré à une inconnue. •Résolution d'une équation de la forme $A(x).B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degré •Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue.
Expressions littérales	•Utilisation d'un symbole ou d'une lettre pour désigner une grandeur variable dans une formule	•Utilisation et production d'expressions littérales à l'occasion de l'élaboration de formules ou de la traduction d'un programme de calcul. •Mise en place des conventions d'écriture bc pour $b \times c$, $3a$ pour $3 \times a$ ou $a \times 3$ et des notations a^2 et a^3, sans	•Réduction d'une expression littérale à une variable, ce qui nécessite d'une part de maîtriser les conventions d'écriture mises en place et d'autre part les différences de signification d'écritures comme a, a^2 et a^3 •Travail sur l'aspect « structural »	• Distinction du rôle joué par les parenthèses dans les écritures comme $f(x)$ et $k(a + b)$. •Détermination de l'expression algébrique d'une fonction linéaire ou affine. •Factorisation d'une expression

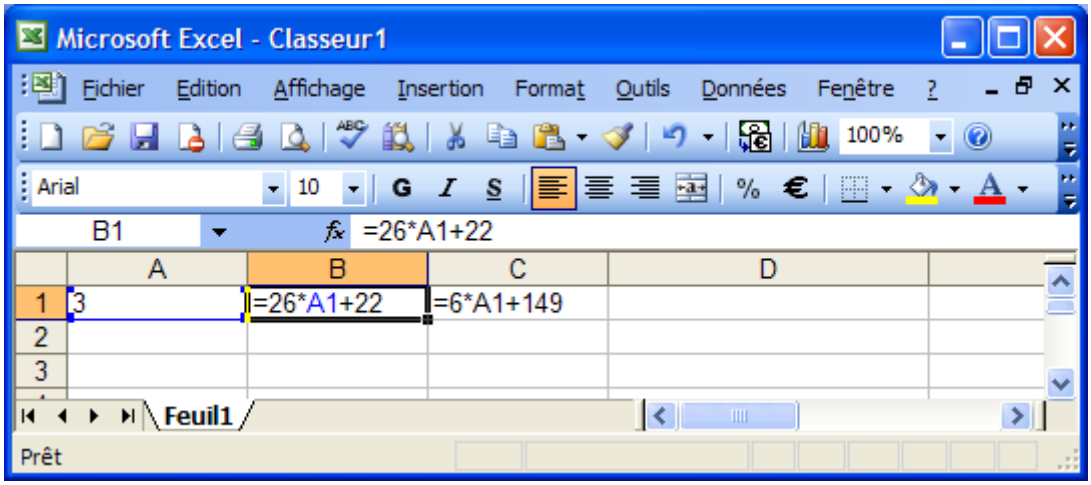
		rendre leur utilisation immédiatement obligatoire •Travail sur l'aspect « structural » d'une expression, traduction du fait qu'un nombre est le suivant d'un nombre, qu'un nombre est multiple de 7… •Test avec des valeurs numériques de l'égalité de deux expressions littérales. •Justification de l'égalité (au sens de l'identité) de deux expressions littérales.	d'une expression : désignation d'un nombre impair, nombres qui se suivent… •Reconnaissance de la forme d'une expression algébrique : somme, produit. Développement d'une expression de la forme $(a + b)(c + d)$	algébrique dans laquelle le facteur est apparent. •Mise en place et utilisation des identités figurant aux programmes.
Calcul littéral et démonstration		•Utilisation du cadre algébrique pour démontrer des résultats arithmétiques comme la somme de deux nombres pairs est un nombre pair. •Utilisation du cadre algébrique pour démontrer des règles de calcul sur les quotients.	•Démonstration de l'équivalence $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ et $ad = bc$. •Démonstration de $\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}$ •Démonstration des règles liant ordre et opérations. •Démonstration de règles de calcul sur les quotients. •Démonstration de la « double distributivité » à l'aide de la distributivité.	•Démonstration de la proportionnalité des accroissements dans le cas d'une fonction affine •Utilisation du cadre algébrique pour démontrer des résultats arithmétiques comme : - si d divise a et b, alors d divise $a – b$ et b et réciproquement ; - si d divise a et b, alors d divise b et r, reste de la division euclidienne de a par b, et réciproquement.

ANNEXE

Exemple d'utilisation d'un tableur pour résoudre une équation

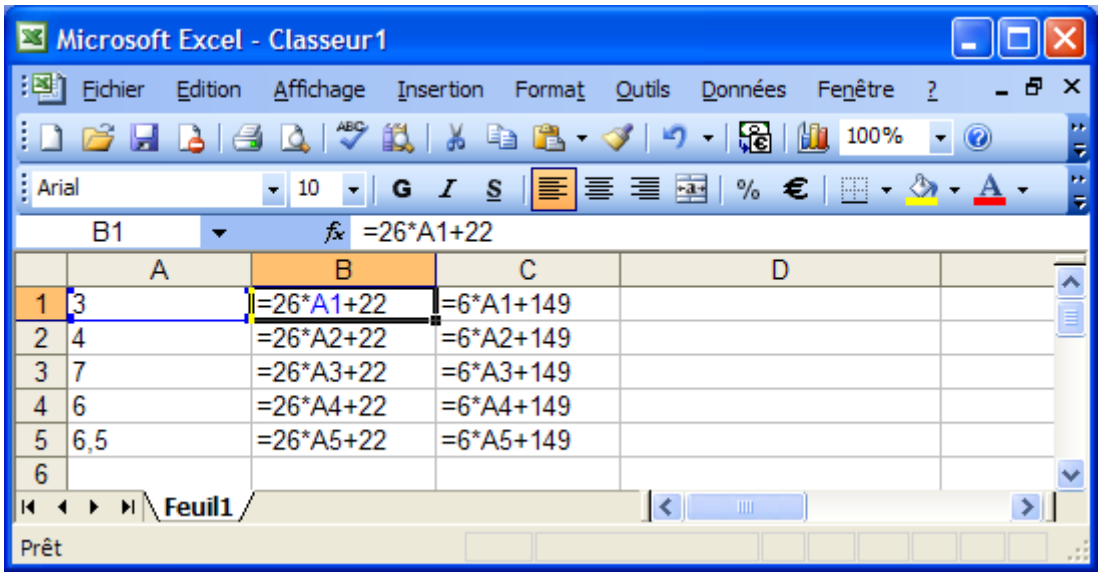
Soit à résoudre l'équation $26x + 22 = 6x + 149$

Dans la cellule A1, on entre une valeur numérique, dans la cellule B1 on entre la formule « = 26*A1+22 » et dans la cellule C1 la formule « = 6*A1+149 ». Dans les cellules B1 et C1, s'affichent alors les valeurs retournées par chacune des deux formules pour la valeur entrée dans la cellule A1. La modification de la valeur entrée dans la cellule A1 entraîne la modification des valeurs qui s'affichent dans les cellules B1 et C1.

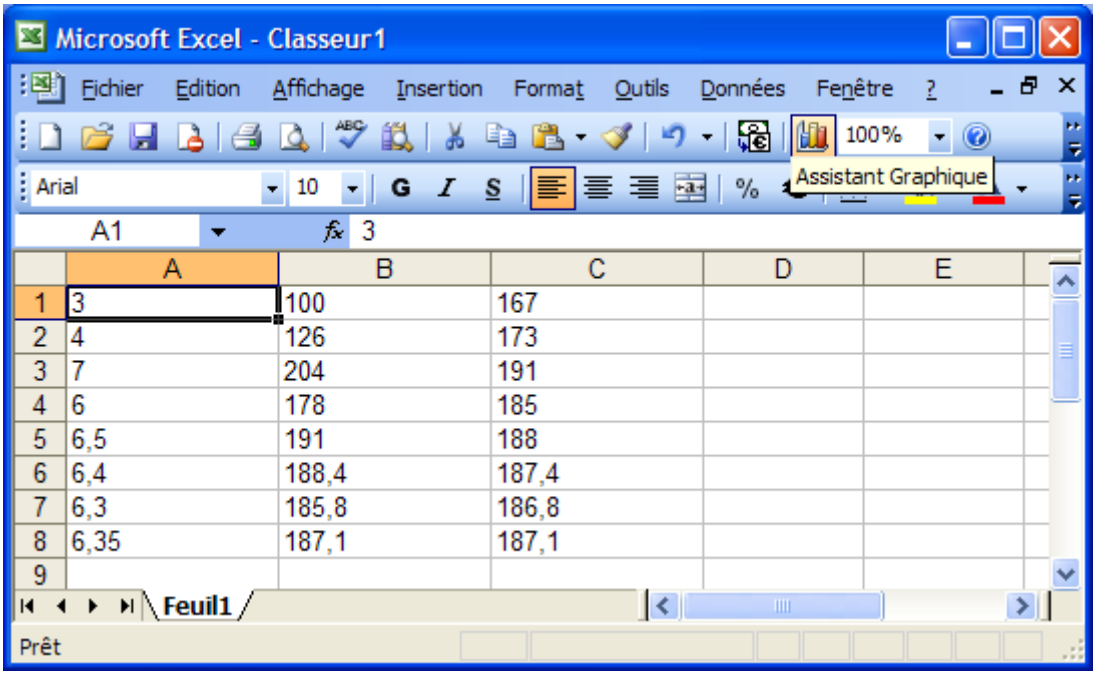


Résoudre l'équation consiste à trouver la valeur qu'il faut entrer dans la cellule A1 pour que les valeurs affichées dans les cellules B1 et C1 soient égales. Mais en procédant ainsi, on ne garde pas trace des essais successifs et il est difficile de prendre en compte l'évolution des valeurs qui sont successivement affichées dans les cellules B1 et C1 pour engager de nouveaux essais.

En réponse à cette difficulté, la procédure peut être améliorée en recopiant dans les cellules B2 et C2 les formules entrées dans les cellules B1 et C1. Lors de la recopie, les formules deviennent « = 26*A2+22 » et « = 6*A2+149 » et les cellules B2 et C2 retournent les valeurs correspondant à la valeur qui est entrée dans la cellule A2. En renouvelant cette opération dans les cellules B*i* et C*i*, les essais successifs restent visibles.

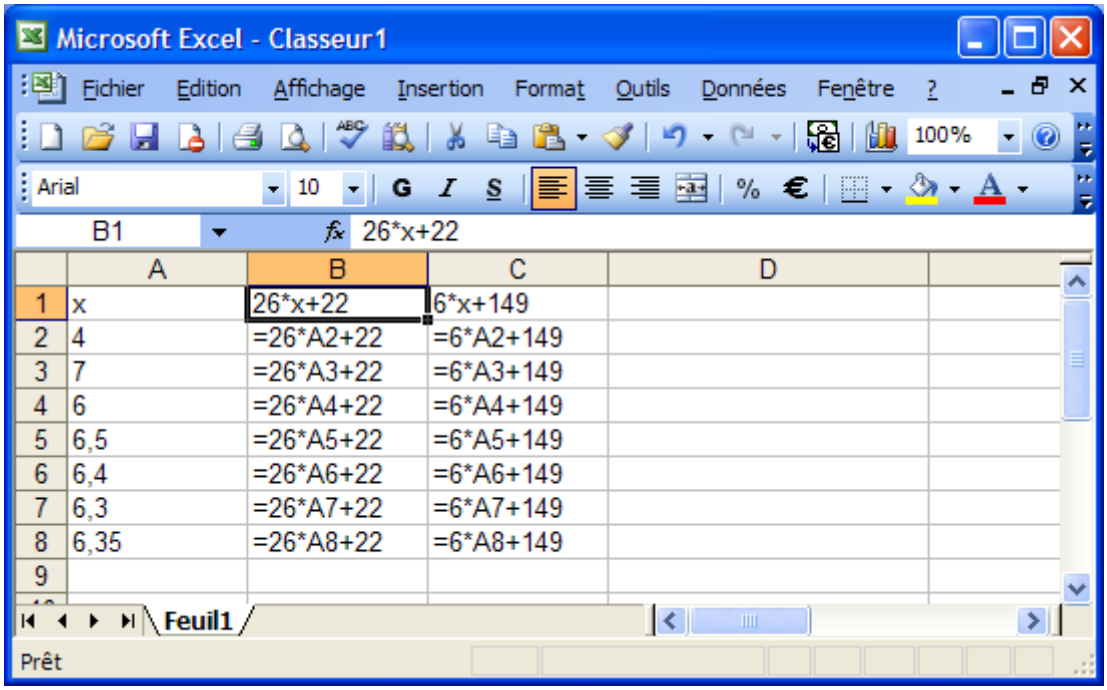


La comparaison de l'évolution des écarts entre les valeurs affichées dans les cellules B*i* et C*i* d'une part et B(*i*–1) et C(*i*–1) d'autre part selon que la valeur entrée dans la cellule A*i* croît ou décroît par rapport à la valeur entrée dans la cellule A(*i*–1), conduit l'élève à formuler des conjectures et à affiner la recherche de la valeur à entrer dans la cellule Ai jusqu'à obtenir l'égalité des valeurs affichées dans les cellules B*i* et C*i*.



	A	B	C	D	E
1	3	100	167		
2	4	126	173		
3	7	204	191		
4	6	178	185		
5	6,5	191	188		
6	6,4	188,4	187,4		
7	6,3	185,8	186,8		
8	6,35	187,1	187,1		
9					

En centrant sa recherche sur la manière de faire évoluer les valeurs entrées dans les cellules A*i* pour que les valeurs affichées dans les cellules B*i* et C*i* se rapprochent jusqu'à devenir égales, l'élève risque de perdre de vue la signification des valeurs qui s'affichent dans les différentes cellules et, en particulier que la valeur entrée dans la cellule A*i* pour laquelle il y a égalité des valeurs affichées dans les cellules B*i* et C*i* est la solution de l'équation $26x + 22 = 6x + 149$. A ce stade de la recherche, il est alors utile de nommer les colonnes. Dans la case A1 on pourra entrer l'expression *x* qui servira à repérer le contenu des cases de la colonne A*i*. De la même manière dans la case B1, on entrera l'expression $26x + 22$ et dans la case C1 l'expression $6x + 149$.



	A	B	C	D
1	x	26*x+22	6*x+149	
2	4	=26*A2+22	=6*A2+149	
3	7	=26*A3+22	=6*A3+149	
4	6	=26*A4+22	=6*A4+149	
5	6,5	=26*A5+22	=6*A5+149	
6	6,4	=26*A6+22	=6*A6+149	
7	6,3	=26*A7+22	=6*A7+149	
8	6,35	=26*A8+22	=6*A8+149	
9				