Acquisition transversale de compétences en logique sur les deux années de ce cycle.

L'objectif est de permettre aux élèves une appropriation progressive de quelques notions de logique dont l'utilisation est indispensable pour clarifier des énoncés ou des situations dans notre discipline, et ceci sur des contenus mathématiques simples pour eux. Il ne s'agit pas du tout de faire un travail formel de logique, qui utiliserait le vocabulaire spécifique de ce domaine. Les quantificateurs, les tables de vérité ne sont en aucun cas à introduire dans cet enseignement.
En mathématiques, une partie du travail porte sur la formulation et la compréhension d'énoncés. Pour clarifier les difficultés que rencontrent les élèves à ce propos, considérons par exemple la phrase suivante :
« Si x est un naturel pair, alors x+1 est premier»
Pour expliciter divers points de vue possibles à son sujet, un vocabulaire spécialisé, qui n'a pas la prétention d'être universel, est utilisé dans le paragraphe qui suit, dans l'unique but de préciser efficacement les notions en jeu. **Il est hors de question d'utiliser ce vocabulaire spécialisé avec les élèves.**
Du point de vue de la logique, la phrase « Si x est un naturel pair, alors x+1 est premier» est une « phrase ouverte » , c'est-à-dire une phrase qui énonce une propriété s'appliquant à une variable x, qui ici représente un nombre. Telle qu'elle est formulée, cette phrase n'est pas une proposition, et n'a donc pas de valeur de vérité : elle n'est ni vraie, ni fausse.
Une telle phrase ouverte fournit cependant des propositions susceptibles de porter le vrai et le faux, lorsqu'on fixe à la fois le type de quantification (existentiel ou universel), et le domaine décrit par la variable. On peut ainsi construire, à partir de la phrase ouverte précédente :
a) une proposition universellement quantifiée dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et 7, qui s'énonce ainsi :
P1 : Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 7, si n est pair, alors n+1 est premier.
Cette proposition est vraie, et pour le montrer, il suffit de vérifier que pour chaque choix de la variable dans l'ensemble considéré, l'implication particulière obtenue est vraie.
b) une proposition universellement quantifiée dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et 20, qui s'énonce ainsi :
P2 : Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 20, si n est pair, alors n+1 est premier.
Cette proposition est fausse, pour le montrer, il suffit de trouver une valeur de la variable dans cet ensemble pour laquelle la propriété particulière obtenue est fausse, c'est la règle du contre-exemple.
c) une proposition existentiellement quantifiée dans l'ensemble des entiers naturels, qui s'énonce ainsi :
P3 : Il existe au moins un naturel n dans N tel que si n est pair, alors n+1 est premier.
Cette proposition est vraie, il suffit pour le montrer de trouver un naturel qui fournit une implication particulière vraie. Dans ce cas, un exemple suffit à démontrer une propriété de ce type.
d) une proposition existentiellement quantifiée dans l'ensemble $\{8, 14, 20, 26, 32\}$, qui s'énonce ainsi :
P4 : Il existe au moins un nombre n dans l'ensemble $\{8, 14, 20, 26, 32\}$ tels que si n est pair, alors n+1 est premier .
Cette proposition est fausse, il faut pour le montrer vérifier qu'aucun des nombres 8, 14, 20, 26, 32 ne fournit une propriété particulière vraie.

Pour les élèves, l'apprentissage du « bon comportement » pour ce qui concerne la formulation, la compréhension d'énoncés mathématiques, et les stratégies à adopter pour se prononcer sur leur valeur de vérité, ne va pas de soi. Deux points sont essentiels pour conduire avec les élèves un travail qui prenne en charge ces apprentissages.

- D'une part, en pratique, dans la communauté des mathématiciens, on ne prend pas toujours la peine de distinguer une phrase ouverte d'une proposition de type implicatif universellement quantifiée. Ainsi la phrase ouverte citée au début peut être parfois identifiée implicitement à la proposition « Pour tout naturel x pair, x+1 est premier », et par suite, déclarée fausse : la prise en compte du contexte de travail suffit d'habitude aux mathématiciens pour se comprendre sans ambiguïté.
Il n'en est pas de même lorsqu'on est dans un contexte d'enseignement, où les élèves n'ont aucune familiarité avec ces pratiques.
Il est donc nécessaire de saisir toutes les occasions de clarifier certains implicites du discours en mathématiques, en décodant avec les élèves certains énoncés. Les énoncés de type implicatif, en particulier, sont très souvent quantifiés universellement, de manière implicite, et cela à l'aide de formulations variées.

- D'autre part, proposer à partir de contenus de programme qui s'y prêtent, un travail qui porte explicitement sur la validité de certaines propositions mathématiques est indispensable pour permettre aux élèves de progresser.
Pour mener avec profit un tel travail sur le vrai et le faux, on privilégiera chaque fois que possible une approche par des situations de recherche (ce que le programme mentionne comme « problème de type ouvert ») choisies pour permettre la construction par les élèves du domaine de validité de propositions quantifiées universellement ou existentiellement.
En effet, pour un tel type de problème, il est nécessaire que les élèves puissent d'abord mettre en oeuvre une étude expérimentale, comprenant une phase de recherche et de formulation de conjectures, ce qui permet, par une confrontation collective des résultats, de clarifier des énoncés, d'en préciser les contours, et de lever les implicites de certaines formulations. La recherche de domaines de validité s'insère naturellement dans cette démarche, le travail de généralisation et de preuve n'arrivant qu'en fin de parcours.
On peut noter qu'en ce qui concerne les propositions quantifiées universellement, la recherche du plus grand domaine de validité possible revient alors à construire une généralisation de propriétés envisagées au départ sur un ensemble de référence plus petit.

Il peut être intéressant de s'interroger sur la pertinence de cet apprentissage relativement aux intentions plus globales de formation des élèves. Les connaissances actuelles ne donnent aucune certitude à propos du transfert des compétences de logique mathématique à d'autres champs scientifiques ou à d'autres domaines, pour lesquels le type d'argumentation employé est de nature souvent très différente.
On peut cependant espérer que le fait d'insister sur les deux aspects évoqués contribuera à construire des habitudes de pensée pertinentes en mathématiques, ainsi qu'en dehors du champ des mathématiques.

Le travail sur ces deux aspects n'est bien sûr pas le seul visé dans cette formation, il est cependant indispensable pour aborder sur des bases claires les diverses notions proposées de façon transversale (en particulier proposition conditionnelle et réciproque, négation d'une proposition, contre-exemple…).
La description de quelques situations d'apprentissage, proposée dans le paragraphe suivant, vise à donner des pistes qui favorisent les deux aspects cités (clarification des implicites, et construction du domaine de validité). L'une se situe dans le domaine de l'arithmétique, l'autre dans celui de l'analyse.

Un exemple de problème d'arithmétique exploitable dès la classe de première

Chercher des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 22. Peut-on les trouver tous (ou tous jusqu'à 5000) ?
Chercher des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 30. Peut-on les trouver tous (ou tous jusqu'à…) ?
Chercher des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 99. Peut-on les trouver tous (ou tous jusqu'à…) ?
Et si les nombres sont m et p ?
Construire trois listes de propriétés mathématiques concernant les multiples communs aux nombres proposés (ou multiples communs jusqu'à…) :

- ***l'une pour lesquelles vous avez suffisamment d'arguments pour affirmer avec certitude que les propositions de cette liste sont vraies.***
- ***une autre pour laquelle vous avez suffisamment d'arguments pour affirmer avec certitude qu'elles sont fausses***
- ***une dernière liste de propriétés pour laquelle vous hésitez.***

La recherche sur les multiples communs de nombres donnés a comme avantages de permettre à des élèves débutants dans ce type de recherche de se lancer en énumérant les multiples des nombres proposés, et en les comparant. On peut utiliser à cet effet un tableur ou une calculatrice, à condition que l'affichage soit suffisamment lisible. Si ce n'est pas le cas avec une calculatrice, l'utilisation d'un logiciel est à privilégier.
Il n'y a bien sûr pas de gestion uniforme d'une telle activité avec les élèves : on peut proposer d'autres nombres, on peut aussi choisir de ne pas faire travailler tous les élèves sur les mêmes nombres, afin de faciliter la formulation de conjectures plus solides. On peut limiter ou non la recherche à un seuil à déterminer, les élèves peuvent alors obtenir des certitudes, puisqu'il s'agit dans ce cas de comparer des ensembles finis.
Ce travail peut permettre de formuler des conjectures pour les nombres proposés, mais la validation de résultats généraux nécessite la construction d'un raisonnement de difficulté différente dans les trois cas proposés.
Enfin la généralisation à m et p comporte plusieurs degrés possibles, et même un travail modeste de ce point de vue reste intéressant en particulier pour l'étude de propositions de type implicatif.

En quoi cette recherche permet-elle de travailler sur des compétences de logique ?

Une première partie du travail peut être faite par petits groupes, ce qui permet la discussion entre élèves. L'enseignant peut leur renvoyer, si nécessaire, des interventions ou des questions. Par exemple :

- Est-ce que ce sont les seuls nombres qui conviennent ?
- Pouvez-vous écrire les listes complètes de multiples communs à … et à… jusqu'à … ?

Après la phase de recherche, une mise en commun est nécessaire pour confronter les propositions des élèves. Ce travail peut être initialisé ou enrichi par des propositions de l'enseignant, pour lesquelles ils doivent se prononcer sur la valeur de vérité, par exemple :

- N'importe quel nombre inférieur à 5000 qui est multiple commun à 15 et 22 est aussi multiple de 330.
- Des multiples de 15 qui sont multiples de 30, ce sont par exemple les multiples de 450.
- Certains multiples de 15 sont aussi multiples de 30.
- Les multiples de 30 sont aussi des multiples de 15.
- Des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 99, ce sont par exemple les multiples de 1485
- Chaque fois qu'un nombre est multiple de 1485, alors il est multiple de 15 et de 99.
- Jusqu'à 5000, les multiples de 15 qui sont aussi multiples de 22, ce sont les multiples de 330.
- Si un nombre quelconque est multiple à la fois de 15 et 30, alors il est forcément multiple de 450.
- Jusqu'à 5000, certains multiples communs à 15 et 99, ne sont pas multiples de 1485.

Pour certaines de ces propositions, la validation fait intervenir un nombre fini de vérifications, qui constituent des exemples ou des contre-exemples, ainsi que la notion de proposition réciproque. Pour que les élèves parviennent à repérer des phrases ayant le même sens, il est important de proposer des propriétés de formulation variée, certaines comportant une quantification plus explicite que d'autres. Les propositions de type implicatif universellement quantifiées sont celles dont le repérage pose le plus de problème aux élèves. Plusieurs formulations sont possibles, ce que l'on peut schématiser ainsi :
En nommant P et Q les propriétés concernées, et E l'ensemble de référence pour la quantification :

Si un x de E vérifie P, alors il vérifie Q
Chaque fois que x dans E vérifie P, alors il vérifie Q
Les x de E (tous les x…) tels que P sont tels que Q
N'importe quel x de E tel que P est tel que Q
Un x de E tel que P est (toujours, forcément, obligatoirement, nécessairement) tel que Q
Des x de E tels que P sont (toujours, forcément, obligatoirement, nécessairement) tels que Q,

Il est important de remarquer que l'article indéfini a parfois le même sens que l'article défini, (il désigne alors un élément générique de l'ensemble considéré) , et qu'on emploie aussi bien le singulier que le pluriel pour ce type de propriétés.
Après l'exploration du problème sur les nombres proposés au départ, on peut par exemple travailler sur la propriété : « Si un nombre est multiple à la fois de m et de p, alors il est multiple de m fois p ».
Une réaction prévisible dans la classe, qui peut d'ailleurs apparaître à propos des phrases comportant des nombres, proposées lors de la première partie du travail, est que la propriété est à la fois vraie et fausse. Ce type de réponse peut être considéré comme relevant d'un stade d'apprentissage intermédiaire acceptable, à condition qu'on l'interprète explicitement comme : « il y a des valeurs numériques de m et p pour lesquelles la proposition est vraie, et d'autres où elle est fausse. »

La seule façon de régler la question est alors d'identifier la quantification universelle sous - entendue dans la propriété visée, comme une convention implicite interne à la communauté des mathématiciens, ce qui ne va pas de soi pour beaucoup d'élèves.
On peut alors énoncer la proposition suivante comme vraie :
« Pour certaines valeurs de m et p, les nombres multiples de m et de p sont exactement les multiples de m fois p »
On peut ensuite rechercher le domaine de validité le plus large possible permettant de produire à partir de la propriété étudiée une proposition quantifiée universellement qui soit vraie.
Ce travail, sur la propriété citée ou sur d'autres, relève d'une démarche de généralisation.

La question des démonstrations et du degré de généralisation, à propos de cet exemple

Il ne faut pas exclure *a priori* la possibilité d'aller, avec certains élèves, au bout de la recherche et d'envisager la généralisation à m et p, en essayant par exemple :

- de caractériser les nombres pour lesquels les multiples communs à m et p sont exactement les multiples de m fois p,
- de caractériser les nombres pour lesquels les multiples communs à m et p sont exactement les multiples de m,
- ou de caractériser les multiples communs à m et p de façon générale dans les autres cas.

Ce n'est évidemment pas une obligation, et l'enseignant est libre d'engager ou non ses élèves dans une activité de preuve. C'est à lui d'évaluer si le coût de telles démonstrations n'est pas trop élevé. Voici quelques éléments susceptibles d'aider à une telle prise de décision.

On peut présenter deux types de preuve pour ces propriétés.
Le premier type est classique : le théorème de Gauss n'étant pas connu des élèves, le seul théorème utilisable dans le cadre de ce programme pour de telles démonstrations est celui de l'existence et l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, qui lui est équivalent[1], et une propriété qui en découle, à savoir : « Si p est premier et si p divise ab, alors p divise a ou p divise b ». Ce type de preuve ne s'appuie pas, de fait, sur la recherche par listes.
Un autre type de démonstration exploite les listes de multiples, et paraît donc intéressante, car elle se situe dans la lignée du travail précédent. (voir dans la bibliographie la brochure « Enseigner l'arithmétique »). Elle paraît difficile quand on la présente avec des entiers p et q quelconques pour montrer que les multiples communs à p et q sont les multiples de leur plus petit multiple commun. Mais elle peut être transcrite à l'identique pour des entiers particuliers, en conservant tout son intérêt.
La voici par exemple pour prouver que les multiples communs à 15 et 99 sont les multiples de 495 :

Soit L15 la liste des multiples de 15, de même pour L99 et L495.
- Alors tout élément de L495 est dans les deux autres listes. En effet un multiple de 495, qui est lui-même multiple de 15 et de 99, est aussi un multiple de 15 et 99.
- Réciproquement, il existe des nombres qui sont à la fois dans L15 et L99. D'après la confrontation des listes obtenues à l'aide du tableur, 495 est le plus petit d'entre eux qui soit non nul.
Quel sera le suivant ? Appelons-le A. Comme il est dans L15, 15 divise à la fois 495 et A, 15 divise A-495. Il en est de même pour 99, donc A-495 est à la fois dans L15 et L99. Comme 495 est le plus petit élément non nul commun à ces deux listes, 495 sera la plus petite valeur non nulle de A-495. D'où A-495=495, c'est-à-dire A=990. On peut ensuite généraliser :
Considérons un élément *a* non nul, à la fois dans L15 et L99. *a* est supérieur au sens large à 495, donc il est compris entre deux multiples successifs de 495 ; il existe un entier q tel que $495q \leq a < 495(q+1)$, c'est à dire $0 \leq a - 495q < 495$. Comme *a* et 495 sont tous deux multiples de 15 et 99, $a - 495q$ l'est aussi, et on a obligatoirement, en tenant compte de la double inégalité précédente, $a - 495q = 0$, ce qui montre que *a* est multiple de 495, et figure donc dans L495.

En analyse, des pistes à propos du sens des symboles « = », « < », « > », et du sens de variation de fonctions.

L'utilisation de symboles =, > ou < , avec leurs différents sens, intervient tout au long du cursus d'enseignement en mathématiques, quelle que soit la série. Les élèves rencontrent à la fois des transformations d'expressions algébriques, et des résolutions d'équations et d'inéquations par l'algèbre, puis par l'analyse, en utilisant éventuellement les informations apportées par la représentation graphique des fonctions mises en jeu.
Les symboles employés entre deux expressions algébriques sont les mêmes, alors que la signification et les questions sous-jacentes sont tout à fait différentes, et souvent d'ailleurs dépendantes du contexte.
Par exemple en 1ère, la partie Analyse contient :

- l'étude de problèmes faisant intervenir des fonctions simples, et la résolution d'équations et d'inéquations reliées à ces problèmes.
- la mise en œuvre de transformations algébriques permettant l'étude du sens de variation de fonctions du second degré ou homographiques à partir de fonctions plus simples,

Lorsqu'on traite ces contenus de programme (voir à ce sujet le document « Analyse » pages 22 et suivantes), on peut proposer un travail centré sur le sens de l'égalité et de l'inégalité. Par exemple, on peut poser la question « Vrai ou faux ? » pour les phrases suivantes :

$-x^2+4x-2=-(x-2)^2$	$-x^2+4x-2\leq-(x-2)^2$
$-x^2+4x-2=2-(x-2)^2$	$-x^2+4x-2\leq 3-(x-2)^2$
$-x^2+4x-2=-(x+3)^2$	$-x^2+4x-2\leq-(x+3)^2$
$\frac{40x}{20+x}=40$	$\frac{40x}{20+x}\geq 39$

[1] Voir à ce sujet la démonstration en fin de cette section

Pour obtenir des réponses valides, il faut transformer chaque phrase (qui du point de vue de la logique, est une phrase ouverte sans valeur de vérité) pour produire des propositions qui précisent explicitement la quantification et le domaine de validité qui lui est attaché.
Ce travail peut être conduit à la fois dans les cadres algébrique et graphique, selon le problème dans lequel il s'insère . Il amène à distinguer des égalités ou inégalités vraies ou fausses pour toute valeur de la variable, d'égalités ou d'inégalités vraies pour quelques valeurs de x, et fausses pour d'autres.

Un autre travail possible concerne le sens de variation de fonctions sur des intervalles. Cela offre une bonne occasion d'attirer l'attention des élèves sur la quantification universelle de la proposition de type implicatif qui constitue la définition de la croissance ou décroissance d'une fonction sur un intervalle.

A propos de l'étude d'une fonction g assez simple, par exemple $g(x) = -x^2 + 4x - 2$ ou $g(x) = \dfrac{40x}{20 + x}$, on peut travailler à partir de la représentation graphique avec l'énoncé suivant :

Déterminer quand cela est possible, un intervalle I de R sur lequel g soit définie, de sorte que les propriétés suivantes soient vraies :
1 – Certains nombres a, b, c, d de I sont tels que $a < b$ et $c < d$ et $g(a) \geq g(b)$ et $g(c) \leq g(d)$
2 - Pour certains réels a et b de I on a à la fois $a < b$ et $g(a) \geq g(b)$
3 - Pour n'importe lesquels des réels a et b de I tels que $a < b$, on a $g(a) < g(b)$
4 - Si deux réels a et b quelconques de I sont tels que $a < b$, alors on a nécessairement $g(a) > g(b)$

La consigne est ici de déterminer un domaine de validité pour des propositions concernant une fonction bien déterminée et qui sont déjà données avec une quantification. D'autres consignes voisines sont possibles : par exemple donner plusieurs choix d'intervalles pour chaque item, et demander un tri selon « vrai – faux ».
Comme il y a de multiples réponses possibles pour chaque item, leur confrontation est un moteur de la discussion entre élèves. L'enseignant peut proposer de comparer les diverses propositions, et demander pour certains items que les élèves s'accordent sur l'intervalle le plus large possible qui répond aux conditions données.
Selon les choix proposés pour l'intervalle I, on obtient des propriétés quantifiées existentiellement ou universellement dont il faut décider si elles sont vraies ou fausses, pour ne retenir que les choix de I fournissant des propriétés vraies (ou trier les choix pour I donnant des phrases vraies de ceux donnant des phrases fausses). Il n'est pas toujours possible de trouver I : par exemple pour la seconde fonction proposée, qui est croissante sur les deux intervalles où elle est définie, et en particulier sur $[0, +\infty[$, (voir le problème des vitesses aller et retour dans la partie « Analyse » de ce document page 25), la proposition issue de la phrase 4 ou de la phrase 2 n'est vraie pour aucun choix de I, et il en est de même pour la proposition issue de la phrase 1, qui nécessite un intervalle où la fonction ne soit pas monotone.
Lorsque I existe, et à condition qu'il soit correctement choisi :
- La proposition vraie issue de chacune des phrases 3 et 4 constitue la définition de la croissance ou décroissance stricte de la fonction en jeu sur l'intervalle choisi.
- Avec le même choix d'intervalle I, la proposition issue de la phrase 2 est la négation de celle qui est issue de la phrase 3, c'est la définition d'une fonction non décroissante sur I.
- La proposition vraie issue de la phrase 1 correspond à une fonction non monotone sur un intervalle : la fonction n'y est ni croissante, ni décroissante, ce qui montre que ces deux propositions étant fausses en même temps, l'une n'est pas la négation de l'autre.

Bibliographie

Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques (V. Durand Guerrier, Maryvonne le Berre, Josette Feurly – Reynaud, Marie Claude Pontille)Ed. IREM de Lyon, 2000
Enseigner l'arithmétique (collectif) IREM de Poitiers, 2000
Logique et raisonnement mathématique, Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. (V. Durand Guerrier, 1996, Thèse de l'Université Claude Bernard-Lyon I 1996)

Annexe

Equivalence du théorème de Gauss avec l'existence et l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers
1 - On suppose l'existence et l'unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.
Soit a, b, c trois entiers tels que a et b soient premiers entre eux et tels que a divise bc.
Alors il existe un entier d vérifiant ad = bc. L'existence des décompositions permet d'écrire :

$$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \qquad c = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_p^{\beta_p} \qquad a = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \dots r_m^{\gamma_m} \qquad d = s_1^{\delta_1} s_2^{\delta_2} \dots s_n^{\delta_n}$$

avec, peut-être, quelques p_i se retrouvant parmi les q_j et quelques r_i se retrouvant parmi les s_j.

Ainsi $X = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}\ q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_p^{\beta_p} = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \dots r_m^{\gamma_m}\ s_1^{\delta_1} s_2^{\delta_2} \dots s_n^{\delta_n}$.

L'unicité de la décomposition de X entraîne que chaque r_i est un p_j ou un q_j : si $r_i = p_j$ alors a et b ayant un diviseur commun ne seraient pas premiers entre eux, donc chaque r_i est un q_j et n'est pas un p_h.

L'unicité, encore, donne alors, pour les exposants, $r_i^{\gamma_i} = q_j^{\beta_j}$ ou $r_i^{\gamma_i + \delta_t} = q_j^{\beta_j}$ (au cas où $r_i = s_t$). D'où $\gamma_i \leq \beta_j$.

Ainsi $a = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \dots r_m^{\gamma_m}$ et $c = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \dots r_n^{\beta_n} \dots r_u^{\beta_u}$ (en renommant éventuellement les facteurs de c) et alors c = a e où e est un entier. Donc a divise c.
2 - La réciproque est connue.
Le théorème de Gauss équivaut à l'existence-unicité de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers