LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Objectifs :

• *Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f, comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.*

• *Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, logicielle, algébrique.*

1. La fonction carrée

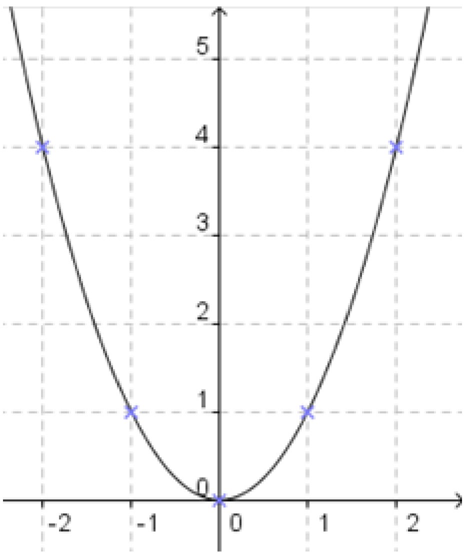
Définition 1. ***La fonction carré***

La fonction carré f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$ ....

x	-2	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	2
x^2							

Définition 2. ***Parabole***

La représentation graphique de la fonction carré s'appelle une ………………. et son équation est $y =$ ....



Propriété 1. ***Parité***

Pour tout réel x, on a $f(-x)=f(x)$, on dit que la fonction est ………………..

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à …………………………… dans un repère orthogonal.

Propriété 2. ***Variations de la fonction carré***

La fonction carré est …………………….. sur $]-\infty\,;0]$ et ………………….. sur $[0\,;+\infty[$.

<u>*Démonstration*</u> : • Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a<b$.

$f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Comme a et b sont positifs, alors $a+b\geq 0$. De plus, $a<b$, alors $a-b<0$.

On en déduit que $f(a)-f(b)\leq 0$, c'est-à-dire $f(a)\leq f(b)$.

Par conséquent, la fonction carré est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

• Soient a et b deux nombres réels négatifs tels que $a<b$.

$f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Comme a et b sont négatifs, alors $a+b\leq 0$. De plus, $a<b$, alors $a-b<0$.

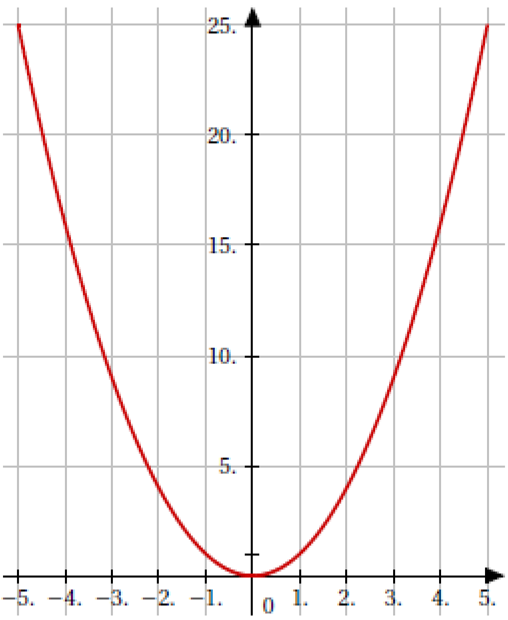
On en déduit que $f(a)-f(b)\geq 0$, c'est-à-dire $f(a)\geq f(b)$.

Par conséquent, la fonction carré est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

[démonstration en vidéo]

Exercice ❶ **Représenter. Calculer**

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction carré sur $[-5\ ;\ 5]$.



1) Résolution algébrique d'équation.

a) Résoudre l'équation $x^2=20$.

b) Résoudre l'équation $x^2=5$.

2) Résolution algébrique d'inéquation.

a) Résoudre l'inéquation $x^2>16$.

b) Résoudre l'inéquation $x^2>16$.

3) Valider graphiquement les réponses trouvées dans la question 1.

Exercice ❷ **Raisonner**

Comparer, sans les calculer, les nombres :

a) $1{,}5^2$ et $1{,}45^2$; b) $(-25)^2$ et $(-24)^2$; c) $(-2{,}5)^2$ et $4{,}3^2$.

Exercice ❸ **Représenter. Raisonner**

1) Reproduire le tableau de variation de la fonction carré.
2) Lorsque x appartient à $[1\ ;\ 3]$, à quel intervalle appartient x^2 ?
3) Lorsque x appartient à $[-2\ ;\ 4]$, à quel intervalle appartient x^2 ?

Exercice ❹ **Représenter. Raisonner. Calculer**

1) Soit $x \le -5$, minorer $(x-3)^2$.

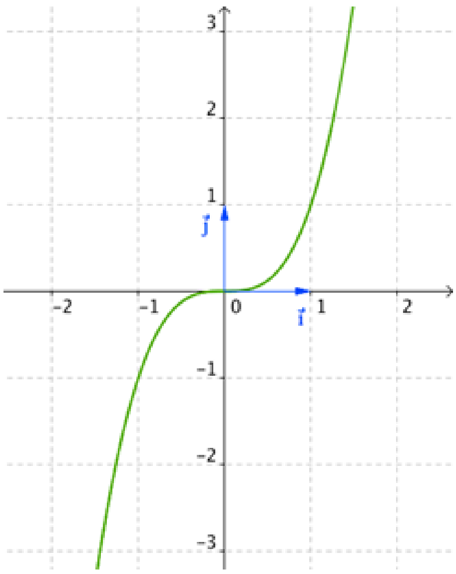
2) Soit $x > 2$, majorer $(5-x)^2$.

2. La fonction cube

Définition 3. ***La fonction cube***

La fonction cube f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ldots\ldots\ldots$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	2
x^3							



Exercice ❺ **Représenter. Raisonner. Calculer**

Dans chaque cas encadrer le réel a^3 :

1) $a \in [2\ ;\ 3]$; 2) $-6 \le a \le -1$;

3) a appartient à l'intervalle $[-10\ ;\ 0{,}01]$; 4) $10^{-5} \le a \le 10^{-3}$

Propriété 3. *Parité*

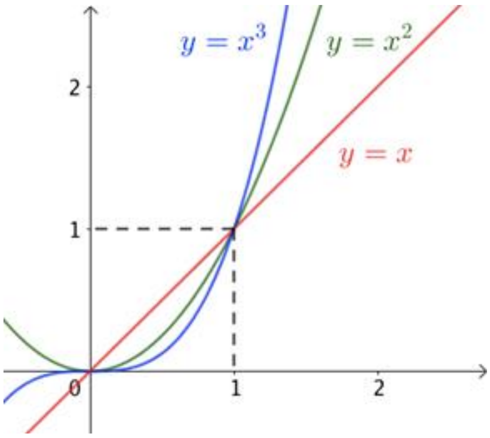
Pour tout réel x, on a $f(-x)=-f(x)$, on dit que la fonction est ………………...

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à ……………………….. dans un repère orthogonal.

3. Position relative des courbes d'équations $y=x$, $y=x^2$ et $y=x^3$

Propriété 4.

- **Si $0\le x\le 1$, alors x……x^2……x^3 .**
- **Si $x\ge 1$, alors x……x^2……x^3 .**



Démonstration : • Position relative des courbes $y=x^2$ et $y=x^3$

Pour étudier la position relative de ces deux courbes, nous allons étudier le signe de x^2-x^3.

Or $x^2-x^3=x^2(1-x)$

$1-x=0$, c'est-à-dire $1-x-1=0-1$, ou encore $x=1$.

x	0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	
$1-x$		$+$		$-$	
$x^2(1-x)$		$+$	0	$+$	

Comme $x^2-x^3\ge 0$ pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, alors la courbe d'équation $y=x^2$ est au-dessus de la courbe la courbe d'équation $y=x^3$.

Comme $x^2-x^3\le 0$ pour tout x de $[1\,;+\infty\,[$, alors la courbe d'équation $y=x^2$ est en dessous de la courbe la courbe d'équation $y=x^3$.

• Position relative des courbes $y=x$ et $y=x^2$

Pour étudier la position relative de ces deux courbes, nous allons étudier le signe de $x-x^2$.

Or $x - x^2 = x(1-x)$

x	0		1		$+\infty$
x		$+$	0	$+$	
$1-x$		$+$		$-$	
$x(1-x)$		$+$	0	$+$	

Comme $x - x^2 \geq 0$ pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, alors la courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe la courbe d'équation $y = x^2$.

Comme $x - x^2 \leq 0$ pour tout x de $[1\,;+\infty\,[$, alors la courbe d'équation $y = x$ est en dessous de la courbe la courbe d'équation $y = x^2$.

démonstration en vidéo

4. La fonction inverse

Définition 4. ***La fonction inverse***

La fonction inverse f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ldots\ldots\ldots$.

x	-2	-1	$-\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	1	2
$\dfrac{1}{x}$						

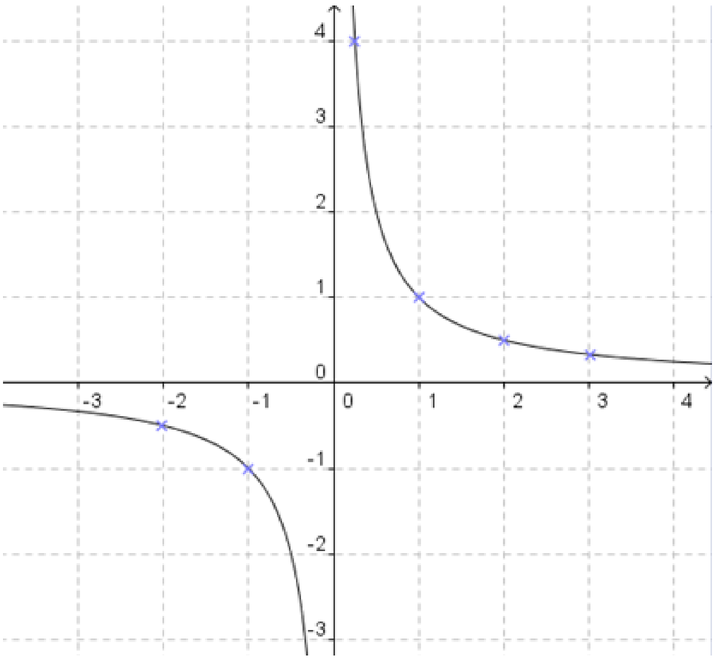
Définition 5. ***Hyperbole***

La représentation graphique de la fonction inverse s'appelle une hyperbole et son équation est $y = \ldots\ldots\ldots$.

Propriété 5. ***Parité***

Pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$, on dit que la fonction est ……………………..

Sa représentation graphique est symétrique par rapport ………………………….. dans un repère orthogonal.



Propriété 6. ***Variations de la fonction inverse***

La fonction inverse est .... sur $]-\infty\,;0[$ et .... sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration : • Soient a et b deux nombres réels strictement négatifs tels que $a<b$.

$f(a)-f(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$.

Comme a et b sont strictement négatifs, alors $ab>0$. De plus, $a<b$, alors $b-a>0$.
On en déduit que $f(a)-f(b)>0$, c'est-à-dire $f(a)>f(b)$.

Par conséquent, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

• On démontre de façon analogue que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

démonstration en vidéo

Exercice ❻ **Représenter. Raisonner**

A l'aide de la courbe de la fonction inverse, résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $\frac{1}{x}=4$; 2) $\frac{1}{x}=-2$; 3) $\frac{1}{x}>-1$; $\frac{1}{x}\leq\pi$.

Exercice ❼ **Raisonner**

Comparer, sans les calculer, les nombres :

a) $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{7}$; c) $-\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$.

Exercice ❽ **Représenter. Raisonner**

1) Lorsque x appartient à $[1\,;\,3]$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?

3) Lorsque x appartient à $[-2\,;-1]$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?

Exercice ❾ **Représenter. Raisonner. Calculer**

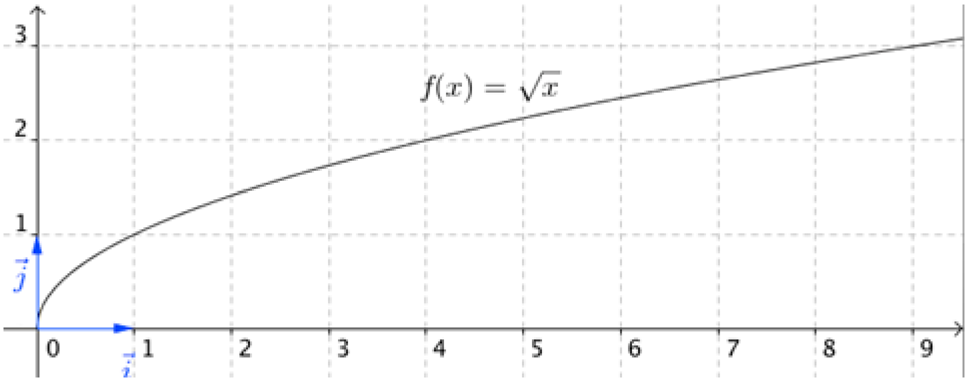
1) Soit $x > 5$, majorer $\dfrac{-2}{1-x}$.

2) Soit $x \leq -1$, minorer $\dfrac{2}{x-7}$.

5. La fonction racine carrée

Définition 6. ***La fonction racine carrée***

La fonction racine carrée f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ldots\ldots\ldots$.



Propriété 7. ***Variations de la fonction racine carrée***

La fonction racine carrée est strictement .... sur $[0\,;+\infty[$.

<u>*Démonstration*</u> : Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Comme $a < b$, alors $a - b < 0$. De plus, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

On en déduit que $f(a) - f(b) < 0$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

Par conséquent, la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

[démonstration en vidéo]

Exercice ⓾ Raisonner

Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\sqrt{x}$:

1) $1 < x < 2$; 2) $9 < x \leq 25$; 3) $1{,}44 < x \leq \pi^2 + 2\pi + 1$; 4) $5 \leq 4x \leq 16$