VARIATIONS ET SIGNE D'UNE FONCTION AFFINE

Objectifs :
- *Relier représentation graphique et tableau de variations.*
- *Comparer deux quantités en utilisant leur différence.*
- *Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.*
- *Résoudre une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.*

1. Variations d'une fonction affine

Exercice ❶ Activité

Ouvrir le logiciel GeoGebra.

1) a) Construire deux curseurs a et b compris entre -10 et 10.

b) Construire la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=ax+b$.

2) a) Quel est l'effet de a ?

b) Quel est l'effet de b ?

Propriété 1. ***Variations d'une fonction affine***

Soit f est fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x)=ax+b$, avec a un réel non nul et b un réel.

• Si $a>0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Si $a<0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1<x_2$.

On a : $f(x_1)=ax_1+b$ et $f(x_2)=ax_2+b$.

Par suite, $f(x_1)-f(x_2)=(ax_1+b)-(ax_2+b)=ax_1+b-ax_2-b=a(x_1-x_2)$.

Etudions le signe de $f(x_1)-f(x_2)$: comme $x_1<x_2$, alors $x_1-x_2<0$.

Si $a>0$, alors $f(x_1)-f(x_2)<0$; d'où $f(x_1)<f(x_2)$, et ainsi la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a<0$, alors $f(x_1)-f(x_2)>0$; d'où $f(x_1)>f(x_2)$, et ainsi la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

démonstration en vidéo

Exercice ❷ Raisonner. Représenter

Donner les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+4$ et $g(x)=-x+5$.

2. Signe d'une fonction affine

Exercice ❸ **Activité**

1) *Étude de cas particuliers*

Cas 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 4$.

a) Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
b) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$.
c) Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$.
d) En déduire l'intervalle sur lequel $f(x) < 0$.
e) Retrouver ce résultat par le calcul.
f) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
$f(x)$		0	

Cas 2 : Reprendre l'étude précédente avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 5$.

2) *Bilan*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Déterminer, en utilisant les cas ci-dessus, le signe de l'expression de $f(x)$ en fonction du signe de a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
$f(x)$		0	

cours en vidéo

Exercice ❸ **Raisonner. Représenter**

Donner les tableaux de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 9$ et $g(x) = -2x + 1$.

corrigés en vidéo

3. Résolution d'une inéquation produit ou quotient

Méthode pour résoudre une inéquation produit

Résoudre dans R l'inéquation $(3x-2)(-4x+1) \leq 0$:

- *On résout l'équation* $3x - 2 = 0$.
- *On étudie l'équation* $-4x + 1 = 0$.
- *On place dans un tableau des signes des expressions.*
- *On conclut.*

• $3x - 2 = 0$ équivaut à $3x - 2 + 2 = 0 + 2$, c'est-à-dire à $3x = 2$, ou encore à $x = \dfrac{2}{3}$

$-4x+1=0$ équivaut à $-4x+1-1=0-1$, c'est-à-dire à $-4x=-1$, ou encore à $x=\dfrac{1}{4}$

• On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $-4x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
signe de $(3x+2)(-4x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• On conclut : $\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

Méthode pour résoudre une inéquation quotient

Résoudre dans R l'inéquation $\dfrac{3x-2}{-4x+1}\geq 0$:

- *On résout l'équation* $3x-2=0$.
- *On étudie l'équation* $-4x+1=0$.
- *On place dans un tableau des signes des expressions sans oublier d'exclure la valeur qui annule le dénominateur.*
- *On conclut.*

• $3x-2=0$ équivaut à $3x-2+2=0+2$, c'est-à-dire à $3x=2$, ou encore à $x=\dfrac{2}{3}$

$-4x+1=0$ équivaut à $-4x+1-1=0-1$, c'est-à-dire à $-4x=-1$, ou encore à $x=\dfrac{1}{4}$

• On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $-4x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
signe de $(3x+2)(-4x+1)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

• On conclut : $\mathscr{S}=\left]\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{2}{3}\right]$.

Exercice ❹ **Application directe**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $(2x+1)(5x+1)\leq 0$; b) $3x(-x+7)>0$; c) $\dfrac{4x-3}{2x+1}\leq 0$; d) $\dfrac{-2x-5}{x+3}<0$

Exercice ❺ **Application directe**

Résoudre dans ℝ l' inéquation suivante : $(2x+1)(3-x)\leq(3-x)^2$.

corrigé en vidéo

Exercice ❻ **Application directe**

Résoudre dans ℝ l' inéquation suivante : $\dfrac{8}{x-2}-4\leq 0$.

corrigé en vidéo