Sujet Type BAC - les probabilités

Exercice 1

Sujet Zéro n°1 : Vrai ou Faux

Indiquer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1 Afin de lutter contre le dopage dans le sport, un test a été mis en place.
En principe, ce test est positif lorsque le sportif est dopé, et négatif lorsqu'il n'est pas dopé. Toutefois, ce test peut commettre des erreurs : il peut être positif lorsque le sportif n'est pas dopé, et négatif lorsque le sportif est dopé.

Le tableau ci-dessous donne les résultats recueillis auprès de 200 coureurs ayant participé à un marathon.

	Coureur non dopé	Coureur dopé	Total
Test positif	15	5	20
Test négatif	178	2	180
Total	193	7	200

On note :

D : « le coureur est dopé » et P : « le test est positif ».

a On choisit un coureur au hasard parmi les 200 coureurs testés.
Affirmation 1 : La probabilité que le coureur ne soit pas dopé ou soit testé positif est égale à $\frac{213}{200}$.

b On choisit un coureur au hasard parmi ceux ayant eu un test positif.
Affirmation 2 : Il y a 75 % de chances que le coureur ne soit pas dopé.

c On choisit un coureur au hasard parmi les 200 coureurs testés.
Affirmation 3 : La probabilité que le coureur soit concerné par une erreur de test est égale à 8,5 %.

2 Au tennis, un service peut être réussi ou manqué. Une joueuse de tennis s'entraîne à faire des services.
On admet que :

$$p(R) = 0{,}9$$

où R désigne l'événement : « le service est réussi ».
La joueuse fait deux services.
Affirmation 4 : La probabilité qu'exactement un service soit réussi sur les deux est égale à 0,09.

Hans Amble Hans Amble Hans Amble

Corrigé Exercice 1

1. On note :

$$D : \text{« le coureur est dopé »} \qquad \text{et} \qquad P : \text{« le test est positif »}.$$

Ainsi :

$$\overline{D} : \text{« le coureur n'est pas dopé »} \qquad \text{et} \qquad \overline{P} : \text{« le test est négatif »}.$$

   a. On cherche les coureurs qui ne sont pas dopés ou qui ont un test positif.
   Il y a 193 coureurs non dopés et, parmi les coureurs dopés, 5 ont un test positif.
   Donc le nombre de coureurs concernés est :
   $$193 + 5 = 198.$$
   Ainsi, la probabilité cherchée est :
   $$\frac{198}{200}.$$
   Or :
   $$\frac{198}{200} \neq \frac{213}{200}.$$
   L'affirmation 1 est donc **fausse**.

   b. On choisit seulement parmi les coureurs ayant eu un test positif.
   Il y a 20 coureurs avec un test positif.
   Parmi eux, 15 ne sont pas dopés.
   Donc la probabilité cherchée est :
   $$\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%.$$
   L'affirmation 2 est donc **vraie**.

   c. Une erreur de test correspond à deux cas :
   $$\overline{D} \cap P \qquad \text{ou} \qquad D \cap \overline{P}.$$
   D'après le tableau :
   $$\overline{D} \cap P : 15 \text{ coureurs}$$
   et
   $$D \cap \overline{P} : 2 \text{ coureurs}.$$
   Donc le nombre de coureurs concernés par une erreur est :
   $$15 + 2 = 17.$$
   Ainsi, la probabilité cherchée est :
   $$\frac{17}{200} = 0{,}085 = 8{,}5\,\%.$$
   L'affirmation 3 est donc **vraie**.

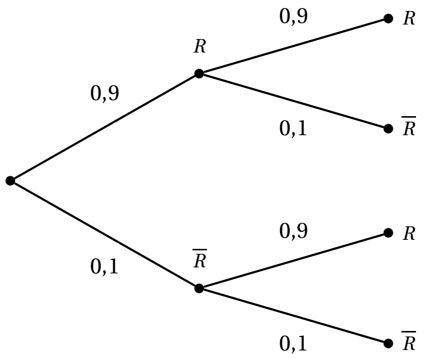
2. On note :

$$R : \text{« le service est réussi »} \qquad \text{et} \qquad \overline{R} : \text{« le service est manqué »}.$$

On a :

$$p(R) = 0{,}9 \qquad \text{et} \qquad p(\overline{R}) = 0{,}1.$$

Comme les deux services sont indépendants, on peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Exactement un service est réussi dans les deux cas suivants :

$$R \cap \overline{R} \qquad \text{ou} \qquad \overline{R} \cap R.$$

Donc :

$$p(\text{exactement un service réussi}) = 0{,}9 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09 + 0{,}09 = 0{,}18.$$

Or :

$$0{,}18 \neq 0{,}09.$$

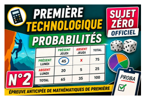
L'affirmation 4 est donc **fausse**.

Hans Amble

Exercice 2

Le club d'escalade

Un club d'escalade propose à ses 100 adhérents deux séances par semaine : lundi, jeudi.



À chacune des séances, chaque adhérent est libre de venir ou pas.

Le tableau ci-dessous récapitule les choix des adhérents une semaine donnée.

	Présent le JEUDI	Absent le JEUDI	Total
Présent le LUNDI	45	x	75
Absent le LUNDI	20	5	25
Total	65	35	100

Exemple : le tableau montre que 45 *adhérents sont venus lundi et jeudi.*

1. Décrire par une phrase ce que représente le nombre x et déterminer sa valeur.
2. On choisit un adhérent au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un adhérent qui n'est venu ni le lundi ni le jeudi ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un adhérent qui n'est venu qu'un seul jour ?
   c. On sait à présent que l'adhérent choisi est venu le lundi. Quelle est la probabilité qu'il soit également venu le jeudi ?
3. Chacun des adhérents verse au club une cotisation annuelle de 100 euros.
   a. En 2026, le club compte 100 adhérents. Quel est le montant total des cotisations versées au club en 2026 ?
   b. On suppose que, de 2026 inclus à 2041 inclus, le montant de la cotisation reste stable, mais que le nombre d'adhérents augmente régulièrement de 5 unités chaque année.
   Quel sera le montant total des cotisations versées au club entre 2026 et 2041 ?

   Indication : on pourra utiliser la formule ci-dessous :

$$a+(a+r)+(a+2r)+(a+3r)+\cdots+(a+nr)=\frac{2a+nr}{2}\times(n+1).$$

Hans Amble

Corrigé Exercice 2

1 Le nombre x représente le nombre d'adhérents qui sont venus le lundi mais qui ne sont pas venus le jeudi.
Dans la première ligne du tableau, on a :

$$45 + x = 75.$$

Donc :

$$x = 75 - 45 = 30.$$

2 a. Les adhérents qui ne sont venus ni le lundi ni le jeudi sont ceux qui sont absents le lundi et absents le jeudi.
D'après le tableau, il y en a 5 sur 100.
Donc la probabilité cherchée est :

$$\frac{5}{100} = 0{,}05.$$

b. Un adhérent venu un seul jour est soit venu seulement le lundi, soit venu seulement le jeudi.
D'après le tableau, il y en a :

$$30 + 20 = 50.$$

Donc la probabilité cherchée est :

$$\frac{50}{100} = 0{,}5.$$

c. On sait que l'adhérent choisi est venu le lundi.
Il y a 75 adhérents venus le lundi, et parmi eux 45 sont aussi venus le jeudi.
Donc la probabilité cherchée est :

$$\frac{45}{75} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

3

a. En 2026, il y a 100 adhérents et chacun verse 100 euros.
Le montant total des cotisations est donc :

$$100 \times 100 = 10\,000.$$

Le club reçoit donc 10 000 euros en 2026.

b.

c. De 2026 à 2041 inclus, il y a :

$$2041 - 2026 + 1 = 16$$

années.
Le montant total des cotisations est :

$$100 \times 100 + 100 \times (100 + 5) + 100 \times (100 + 2 \times 5) + \cdots + 100 \times (100 + 15 \times 5).$$

Donc :

$$100 \times (100 + (100 + 5) + (100 + 2 \times 5) + \cdots + (100 + 15 \times 5)).$$

On reconnaît la formule :

$$a + (a + r) + (a + 2r) + \cdots + (a + nr) = \frac{2a + nr}{2} \times (n + 1),$$

avec :

$$a = 100, \qquad r = 5, \qquad n = 15.$$

Donc :

$$100 \times \left(\frac{2 \times 100 + 15 \times 5}{2} \times (15 + 1)\right) = 100 \times \left(\frac{200 + 75}{2} \times 16\right).$$

Ainsi :

$$100 \times \left(\frac{275}{2} \times 16\right) = 100 \times 275 \times 8 = 2200 \times 100.$$

Donc :

$$\boxed{220\,000}$$

Le montant total des cotisations versées au club entre 2026 et 2041 est donc de 220 000 euros.

Hans Amble
Hans Amble
Hans Amble

Exercice 3

l'office de tourisme

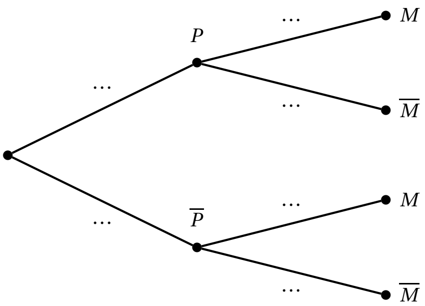
Pour fidéliser ses touristes, l'office de tourisme d'une ville propose gratuitement un jeu en deux étapes.
La première étape consiste à gratter une carte pour gagner un porte-clefs de la ville.
La deuxième étape consiste à gratter une autre carte pour gagner une entrée à la piscine municipale.
Ces deux étapes du jeu sont indépendantes.
Le touriste a :

- sept chances sur dix de gagner un porte-clefs de la ville;
- quatre chances sur dix de gagner une entrée gratuite à la piscine municipale.

On définit les événements suivants :

- P : « le touriste gagne un porte-clefs de la ville »;
- M : « le touriste gagne une entrée gratuite à la piscine municipale ».

1 a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité que le touriste ne gagne aucun lot.

c. Calculer la probabilité que le touriste remporte au moins un lot.

2 Un porte-clefs coûte 0,80 euro à la municipalité et une entrée à la piscine 5,50 euros.
On note X la variable aléatoire qui à chaque touriste participant associe le coût, en euro, de ses éventuels lots pour la municipalité.

a. Justifier que $P(X = 0,80) = 0,42$.

b. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de X. Le recopier et le compléter.

k	0	0,80	5,50	6,30
$P(X = k)$	0,18	0,42	0,12	...

c. Calculer l'espérance. Interpréter.

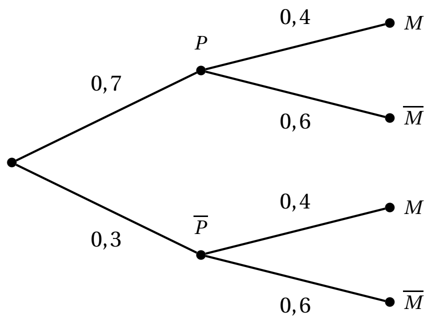
Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble

Corrigé Exercice 3

1 **a** On a :

$$P(P) = 0,7, \quad P(\overline{P}) = 0,3, \quad P(M) = 0,4, \quad P(\overline{M}) = 0,6.$$

Comme les deux étapes du jeu sont indépendantes, les probabilités de M et de $\overline{M}$ sont les mêmes après P et après $\overline{P}$.
L'arbre complété est donc :



b Le touriste ne gagne aucun lot lorsqu'il ne gagne ni le porte-clefs ni l'entrée à la piscine, c'est-à-dire lors de l'événement $\overline{P} \cap \overline{M}$.
Ainsi :

$$P(\overline{P} \cap \overline{M}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18.$$

La probabilité que le touriste ne gagne aucun lot est donc :

$$\boxed{0,18}.$$

c L'événement « le touriste remporte au moins un lot » est l'événement contraire de « le touriste ne gagne aucun lot ».
Donc :

$$1 - 0,18 = 0,82.$$

La probabilité que le touriste remporte au moins un lot est :

$$\boxed{0,82}.$$

2 **a** Pour obtenir $X = 0,80$, le touriste doit gagner uniquement le porte-clefs. Il doit donc gagner le porte-clefs et ne pas gagner l'entrée à la piscine.
Ainsi :

$$P(X = 0,80) = P(P \cap \overline{M}) = 0,7 \times 0,6 = 0,42.$$

b On complète ensuite la loi de probabilité de X.
Pour $X = 0$, le touriste ne gagne aucun lot :

$$P(X = 0) = 0,18.$$

Pour $X = 5,50$, le touriste gagne uniquement l'entrée à la piscine :

$$P(X = 5,50) = P(\overline{P} \cap M) = 0,3 \times 0,4 = 0,12.$$

Pour $X = 6,30$, le touriste gagne les deux lots :

$$P(X = 6,30) = P(P \cap M) = 0,7 \times 0,4 = 0,28.$$

On obtient donc :

k	0	0,80	5,50	6,30
$P(X = k)$	0,18	0,42	0,12	0,28

c L'espérance de X est :

$$E(X) = 0 \times 0,18 + 0,80 \times 0,42 + 5,50 \times 0,12 + 6,30 \times 0,28.$$

Donc :

$$E(X) = 0 + 0,336 + 0,66 + 1,764 = 2,76.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(X) = 2,76}$$

Cela signifie qu'en moyenne, chaque touriste participant au jeu coûte 2,76 euros à la municipalité.

Hans Amble

Exercice 4 — les biscuits

Un enfant mange des biscuits au goûter. Un relevé de ses habitudes alimentaires établi sur plusieurs jours a montré qu'il choisit :

- soit un biscuit au chocolat, une fois sur cinq ;
- soit un biscuit nature, une fois sur deux ;
- soit un biscuit à la myrtille.

On choisit un jour au hasard de ce relevé.

1 a. Quelle est la probabilité de l'événement : « L'enfant a mangé un biscuit au chocolat » ?

b. Montrer que la probabilité de l'événement « L'enfant a mangé un biscuit à la myrtille » est égale à 0,3.

2 L'apport en calories des biscuits est le suivant :

- un biscuit au chocolat apporte 100 kilocalories ;
- un biscuit nature apporte 60 kilocalories ;
- un biscuit à la myrtille apporte 80 kilocalories.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de kilocalories prises par l'enfant le jour pris au hasard du relevé de ses habitudes alimentaires.

a. Interpréter dans le contexte de l'exercice l'événement $(X = 100)$.

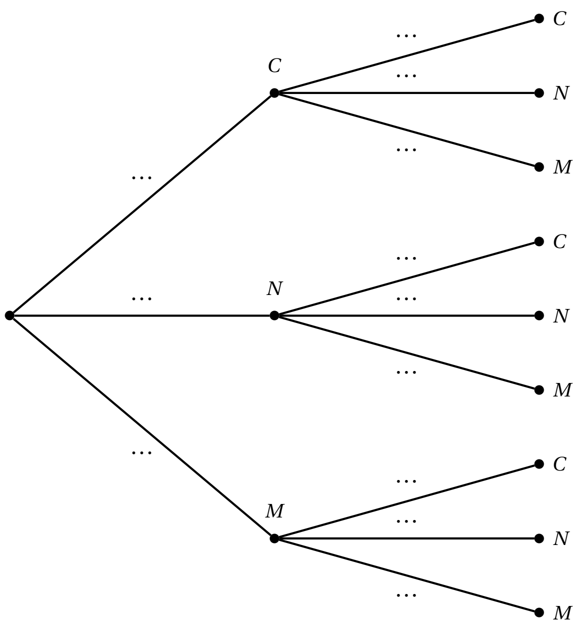
b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3 Deux jours de suite, l'enfant choisit un biscuit pour son goûter.
On suppose que les choix des deux jours sont indépendants.
On note :

C : « il choisit un biscuit au chocolat », N : « il choisit un biscuit nature », M : « il choisit un biscuit à la myrtille ».

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité que l'enfant choisisse deux fois un biscuit au chocolat.

c. Calculer la probabilité que l'enfant choisisse une fois un biscuit au chocolat et une fois un biscuit nature (dans n'importe quel ordre) .

d. Calculer la probabilité que l'enfant choisisse au moins une fois un biscuit au chocolat.

4 Trois jours de suite, l'enfant choisit un biscuit pour son goûter.
On suppose que les choix des trois jours sont indépendants.
Calculer la probabilité que l'enfant choisisse trois fois un biscuit nature.

Hans Amble

Corrigé Exercice 4

1 a L'enfant choisit un biscuit au chocolat une fois sur cinq, donc :

$$p(C) = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

b La somme des probabilités vaut 1.
Or :

$$p(C) = 0{,}2 \qquad \text{et} \qquad p(N) = 0{,}5.$$

Donc :

$$p(M) = 1 - 0{,}2 - 0{,}5 = 0{,}3.$$

2 a L'événement $(X = 100)$ signifie que l'enfant a mangé un biscuit apportant 100 kilocalories.
Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que l'enfant a mangé un biscuit au chocolat.

b La loi de probabilité de X est :

k	60	80	100
$p(X = k)$	0,5	0,3	0,2

c L'espérance de X est :

$$E(X) = 60 \times 0{,}5 + 80 \times 0{,}3 + 100 \times 0{,}2.$$

Donc :

$$E(X) = 30 + 24 + 20 = 74.$$

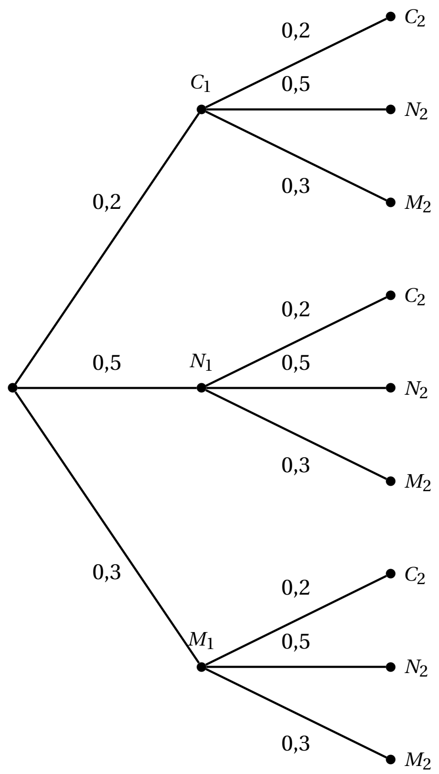
Ainsi :

$$\boxed{E(X) = 74}$$

Cela signifie qu'en moyenne, l'enfant consomme 74 kilocalories par goûter avec ces biscuits.

3 a Comme les choix des deux jours sont indépendants, on complète chaque niveau avec les mêmes probabilités :

$$p(C) = 0{,}2, \qquad p(N) = 0{,}5, \qquad p(M) = 0{,}3.$$



b Choisir deux fois un biscuit au chocolat correspond à l'événement :

$$C_1 \cap C_2.$$

Donc :

$$p(C_1 \cap C_2) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04.$$

Hans Amble

Corrigé Exercice 4

3 c

d On cherche les deux cas possibles :

$$C_1 \cap N_2 \quad \text{ou} \quad N_1 \cap C_2.$$

Donc :

$$p(C_1 \cap N_2) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$$

et

$$p(N_1 \cap C_2) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1.$$

Ainsi :

$$p\big((C_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap C_2)\big) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2.$$

La probabilité cherchée est donc :

$$\boxed{0{,}2}$$

e On cherche la probabilité que l'enfant choisisse au moins une fois un biscuit au chocolat.
Avec l'arbre, trois chemins conviennent :

$$C_1, \quad N_1 \cap C_2, \quad M_1 \cap C_2.$$

Donc :

$$p(C_1) = 0{,}2$$

$$p(N_1 \cap C_2) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$$

$$p(M_1 \cap C_2) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$$

Ainsi :

$$p(C_1) + p(N_1 \cap C_2) + p(M_1 \cap C_2) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}06 = 0{,}36.$$

La probabilité cherchée est donc :

$$\boxed{0{,}36}$$

f On sait que l'enfant a choisi un biscuit au chocolat le premier jour.
Comme les choix des deux jours sont indépendants, cela ne change pas la probabilité du choix du deuxième jour.
Donc la probabilité qu'il choisisse un biscuit nature le deuxième jour est :

$$\boxed{0{,}5}.$$

4 Trois jours de suite, l'enfant choisit un biscuit pour son goûter.
On cherche la probabilité qu'il choisisse trois fois un biscuit nature.
Comme les choix des trois jours sont indépendants :

$$p(N \cap N \cap N) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5.$$

Donc :

$$p(N \cap N \cap N) = 0{,}125.$$

Ainsi, la probabilité que l'enfant choisisse trois fois un biscuit nature est :

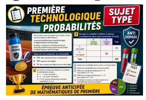
$$\boxed{0{,}125}.$$

Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble

Exercice 5 — le test anti-dopage

https ://youtu.be/cKxBFufLkEM

Afin de lutter contre le dopage dans le sport, un test a été mis en place sur 200 coureurs. En principe, ce test est positif lorsque le sportif est dopé et négatif lorsqu'il n'est pas dopé. Toutefois, ce test peut commettre des erreurs : il peut être positif lorsque le sportif n'est pas dopé et négatif lorsque le sportif est dopé.



Parmi ces 200 coureurs, on a dénombré :

- 10 % de ces coureurs ont eu un test positif;
- 193 coureurs non dopés;
- 1 % des coureurs sont dopés et ont un test négatif.

1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous en justifiant les deux cases numérotées (1) et (2) :

	$\overline{D}$: Coureur non dopé	D : Coureur dopé	Total
T : Test positif			(1)
$\overline{T}$: Test négatif		(2)	
Total			200

2 On choisit un coureur au hasard et on considère les évènements suivants :

- T : « le test est positif »;
- D : « le coureur est dopé »;
- $\overline{T}$ et $\overline{D}$ sont les évènements contraires respectifs de T et de D.

Dans les questions suivantes, on donnera les résultats sous forme de fraction.

a. Quelle est la probabilité que le coureur ne soit pas dopé?

b. Quelle est la probabilité que ce test soit positif?

c. Définir par une phrase l'évènement $\overline{T} \cap D$, puis calculer $P(\overline{T} \cap D)$.

d. Définir par une phrase l'évènement $T \cup \overline{D}$, puis calculer $P(T \cup \overline{D})$.

e. On choisit un coureur non dopé. Quelle est la probabilité que son test soit positif?

Hans Amble

Corrigé Exercice 5

1. On sait que 10 % des 200 coureurs ont eu un test positif, donc :

$$(1) = 200 \times \frac{10}{100} = 20.$$

On sait aussi que 1 % des coureurs sont dopés et ont un test négatif, donc :

$$(2) = 200 \times \frac{1}{100} = 2.$$

Il y a 193 coureurs non dopés, donc il y a :

$$200 - 193 = 7$$

coureurs dopés.
On complète alors le tableau :

	$\overline{D}$: Coureur non dopé	D : Coureur dopé	Total
T : Test positif	15	5	20
$\overline{T}$: Test négatif	178	2	180
Total	193	7	200

2. a. La probabilité que le coureur ne soit pas dopé est :

$$P(\overline{D}) = \frac{193}{200}.$$

b. La probabilité que le test soit positif est :

$$P(T) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}.$$

c. L'évènement $\overline{T} \cap D$ signifie : « le test est négatif et le coureur est dopé ».
On a :

$$P(\overline{T} \cap D) = \frac{2}{200} = \frac{1}{100}.$$

d. L'évènement $T \cup \overline{D}$ signifie : « le test est positif ou le coureur n'est pas dopé ».
On utilise la formule :

$$P(T \cup \overline{D}) = P(T) + P(\overline{D}) - P(T \cap \overline{D}).$$

Donc :

$$P(T \cup \overline{D}) = \frac{20}{200} + \frac{193}{200} - \frac{15}{200} = \frac{198}{200} = \frac{99}{100}.$$

e. On choisit un coureur non dopé. On cherche donc :

$$P_{\overline{D}}(T) = \frac{15}{193}.$$

Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble Hans Amble