CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 8	
Suites géométriques, produit scalaire	***Le 5 avril 2024***

Exercice 1

On sait que $u_n = u_p \times q^{n-p}$. D'où $4\,374 = 486 \times q^{7-5}$, c'est-à-dire $q^2 = 9$.

Comme q est positive, alors $\boldsymbol{q = 3}$.

Exercice 2

1) Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 2 % est égale à $1 - \frac{2}{100} = 0{,}98$.

Donc au bous de deux mois, la production de déchets sera égale à :
$120 \times 0{,}98 \times 0{,}98 = 115{,}248$. Donc **au bout de 2 mois, la famille A aura produit environ 115 kg de déchets**.

2) a) D'après l'énoncé, $a_{n+1} = a_n \times 0{,}98$. Donc $\boldsymbol{(a_n)}$ **est une suite arithmétique de premier terme 120 et de raison 0,98**.

b) On en déduit que, **pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a_n = 120 \times (0{,}98)^n}$**.

3) On cherche $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}$.

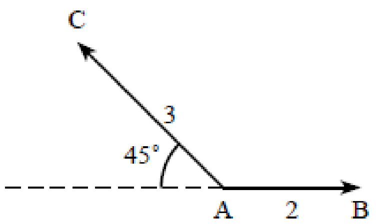
Or $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} = a_1 \times \frac{1-(0{,}98)^{12}}{1-0{,}98} = 120 \times 0{,}98 \times \frac{1-(0{,}98)^{12}}{1-0{,}98} \approx 1\,266$.

La famille A produira environ 1 266 kg de déchets durant l'année 2020.

4) **Le résultat renvoyé par la fonction si on entre l'instruction `S(6)` représente la production de déchets de la famille A durant la première moitié de l'année 2020**.

Exercice 3

1)



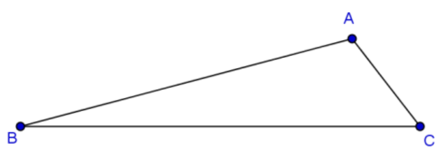
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

D'où : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = -3\sqrt{2}}$.

2)

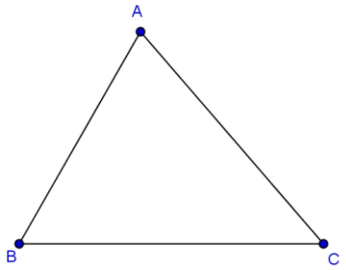


$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

$= \frac{1}{2}(64 + 84 - 100)$

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 24}$.

3)



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}}$

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-4\ ;\ -4\sqrt{3}\right)$ et $\left(6\ ;\ -4\sqrt{3}\right)$.

D'où $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = (-4) \times 6 + \left(-4\sqrt{3}\right) \times \left(-4\sqrt{3}\right)$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 24}$.

<u>Exercice 4</u>

$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(2\vec{u} - \vec{v}\right) = 2\left(\vec{u} \bullet \vec{u}\right) - \vec{u} \bullet \vec{v} + 2\left(\vec{v} \bullet \vec{u}\right) - \vec{v} \bullet \vec{v} = 2 \times \left\|\vec{u}\right\|^2 + \vec{u} \bullet \vec{v} - \left\|\vec{v}\right\|^2 = 8 + 0 - 1 = \boldsymbol{7}$

<u>Exercice 5</u>

1) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$.

Comme ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Par suite, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(6^2 - 4^2 - 3^2\right) = \boldsymbol{\dfrac{11}{2}}$.

2) $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AD} = BA^2 + AD^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$.

Par suite, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2} = 16 + 9 - 2 \times \dfrac{11}{2} \boldsymbol{= 14}$.

3) D'après la question précédente, et comme $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, alors $BD^2 = 14$.
Comme BD est positive, alors $\boldsymbol{BD = \sqrt{14}}$.

<u>Exercice 6</u>

1) Dans ce repère, les points J, R et E ont pour coordonnées respectives $\boldsymbol{(0\,;0)}$, $\boldsymbol{(1;5)}$ et $\boldsymbol{(10\,;1)}$. Par suite, $\overrightarrow{\mathrm{JR}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JE}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\mathbf{JR} = \sqrt{1^2 + 5^2} \boldsymbol{= \sqrt{26}}$ et $\mathbf{JE} = \sqrt{10^2 + 1^2} \boldsymbol{= \sqrt{101}}$.

2) On sait que $\overrightarrow{\mathrm{JR}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{JE}} = \mathrm{JR} \times \mathrm{JE} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{RJE}}\right)$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{JR}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{JE}} = 1 \times 10 + 5 \times 1 = 15$; d'où $\cos\left(\widehat{\mathrm{RJE}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{JR}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{JE}}}{\mathrm{JR} \times \mathrm{JE}} = \dfrac{15}{\sqrt{26} \times \sqrt{101}}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\widehat{\mathrm{EJR}} \approx 73°}$.