CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

Fonctions dérivées, suites arithmétiques	***Le 15 mars 2024***

Exercice 1

1) $h\left(x\right)=\dfrac{x^3-1}{3x^2+1}$.

On a : $h=\dfrac{u}{v}$ avec $u\left(x\right)=x^3-1$ et $v\left(x\right)=3x^2+1$.

D'où : $h'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u\left(x\right)=3x^{3-1}-0=3x^2$ et $v'\left(x\right)=3\times\left(2x\right)+0=6x$.

Par conséquent, $\boldsymbol{h'\left(x\right)}=\dfrac{\left(3x^2\right)\times\left(3x^2+1\right)-\left(x^3-1\right)\times\left(6x\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2+6x}{\left(3x^2+1\right)^2}\boldsymbol{=\dfrac{3x\left(x^3+x+2\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}}$.

2) $g\left(x\right)=h\left(4x-1\right)$ où $h\left(x\right)=\sqrt{x}$. Alors $g'\left(x\right)=4\times h'\left(4x-1\right)$ où $h'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Par suite, $\boldsymbol{g'\left(x\right)}=4\times\dfrac{1}{2\sqrt{4x-1}}\boldsymbol{=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}}$.

Exercice 2

1) $f=u+v$ où $u\left(x\right)=x^2$ et $v\left(x\right)=-5x+6$.

Alors $f'=u'+v'$ où $u'\left(x\right)=2x$ et $v'\left(x\right)=-5$, **et pour tout réel x, $f'\left(x\right)=2x-5$**.

2) La tangente T a pour équation $y=f'\left(3\right)\times\left(x-3\right)+f\left(3\right)$.

Or $f\left(3\right)=3^2-5\times3+6=0$ et $f'\left(3\right)=2\times3-5=1$; d'où $y=1\times\left(x-3\right)+0=x-3$.

Par conséquent, **la tangente T a pour équation $y=x-3$**.

4) $f\left(x\right)-\left(x-3\right)=x^2-5x+6-x+3=x^2-6x+9=\left(x-3\right)^2$.

Comme $\left(x-3\right)^2\geq0$ pour tout réel x, alors **$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.**

Exercice 3

$u\left(n\right)=\left(n+1\right)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$ et $u\left(n+1\right)=2\left(n+1\right)+1=2n+3$.

D'où, pour tout entier naturel n, $u\left(n+1\right)-u\left(n\right)=\left(2n+3\right)-\left(2n+1\right)=2n+3-2n-1=2$.

Donc **$\left(u_n\right)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0=1$ et de raison 2**.

Exercice 4

1) Comme $\left(v_n\right)$ est une suite arithmétique de premier terme v_0 et de raison r, alors, pour tous entiers naturels p et q, $v_p-v_q=\left(p-q\right)\times r$.

D'où : $v_5-v_{16}=\left(5-16\right)\times r=-11r$, c'est-à-dire $\boldsymbol{r}=\dfrac{125-48}{-11}\boldsymbol{=-7}$.

De même, $v_0-v_5=\left(0-5\right)\times r=-5\times\left(-7\right)=35$, d'où : $\boldsymbol{v_0}=35+125\boldsymbol{=160}$.

2) Comme $\left(v_n\right)$ est une suite arithmétique de premier terme $v_0=160$ et de raison $r=-7$, alors, **pour tout entier naturel n, v_n** $=v_0+nr$ **$=160-7n$**.

3) $v_n=-127$ équivaut à $160-7n=-127$, c'est-à-dire à $-7n=-287$.

Par conséquent, $\boldsymbol{v_n = -127}$ **lorsque** $\boldsymbol{n = 41}$.

4) $v_n \leq -250$ équivaut à $160 - 7n \leq -250$, c'est-à-dire à $-7n \leq -410$, ou encore à $n \geq \dfrac{410}{7}$.

Comme $\boldsymbol{n}$ est un entier naturel, alors $\boldsymbol{u_n \leq -250}$ à partir de $\boldsymbol{n = 59}$.

5) $S = v_{1789} + v_{1790} + v_{1791} + \ldots + v_{2024} = 236 \times \dfrac{v_{1789} + v_{2024}}{2}$

Or $v_{1789} = 160 - 7 \times 1789 = -12363$ et $v_{2024} = 160 - 7 \times 2024 = -14008$.

Alors $\boldsymbol{S = -3\,111\,778}$.

Exercice 5

1) D'après ce graphique, la suite (u_n) est croissante. Donc **la raison est positive**.

2) **Le premier terme de la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ est $\boldsymbol{u(1) = -4}$** .

On remarque également que $u(5) = 3$. Par suite : $r = \dfrac{3-(-4)}{5-1} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$.

Donc **la raison de cette suite est 1,75** .

Exercice 6

1) $\boldsymbol{u_2} = 130 + 52 \boldsymbol{= 182}$ et $\boldsymbol{u_3} = 182 + 52 \boldsymbol{= 234}$.

2) Comme $u_{n+1} = u_n + 52$ pour tout entier naturel n non nul, alors **$\boldsymbol{(u_n)}$ est une suite arithmétique de premier terme $\boldsymbol{u_1 = 130}$ et de raison 52**.

On en déduit que, **pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ non nul,**

$\boldsymbol{u_n} = u_1 + (n-1) \times r = 130 + (n-1) \times 52 = 130 + 52n - 52 \boldsymbol{= 78 + 52n}$.

3) $\boldsymbol{S_2} = u_1 + u_2 = 130 + 182 \boldsymbol{= 312}$ et $\boldsymbol{S_2} = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 = 312 + 234 \boldsymbol{= 546}$.

4) On veut compléter cet algorithme de sorte que l'exécution de la fonction `nombre_metre(S)` renvoie le nombre maximal de mètres que l'entreprise peut forer avec la subvention octroyée.

La variable `C` contient le coût du forage de n mètres.

Pour tout entier naturel n non nul, on a

$S_{n+1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} = S_n + 130 + 52 \times (n + 1 - 1) = S_n + 130 + 52n$.

Il faut donc ajouter $130 + 52n$ à la variable `C` à chaque tour de boucle.

```
def nombre_metre(S):
    C=130
    n=1
    while C<S:
         C=C+130+52*n
         n=n+1
    return n
```

5) On cherche la plus petite valeur de n pour que $S_n \geq 116610$.

Or $S_n \geq 116610$ équivaut à $26n^2 + 104n \geq 116610$, c'est-à-dire à $26n^2 + 104n - 116610 \geq 0$, ou encore à $n^2 + 4n - 4485 \geq 0$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-4485) = 17956$. Comme $\Delta > 0$, l'expression $n^2 + 4n - 4485$ a deux racines :

$n_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{17956}}{2} = -69$ et $n_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{17956}}{2} = 65$.

D'où $n^2 + 4n - 4485 = (n - (-69))(n - 65) = (n + 69)(n - 65)$.

Comme $n+69>0$ pour tout entier naturel n, $n^2+4n-4485\geq 0$ équivaut à $n-65\geq 0$, c'est-à-dire à $n\geq 65$.
Par conséquent, **avec 116610 €, on pourra creuser 65 mètres**.