CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Trigonométrie, fonctions dérivées	*Le 9 février 2024*

Exercice 1

La mesure principale de l'angle associé à D est $\frac{\pi}{6}$.

La mesure principale de l'angle associé à A est $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

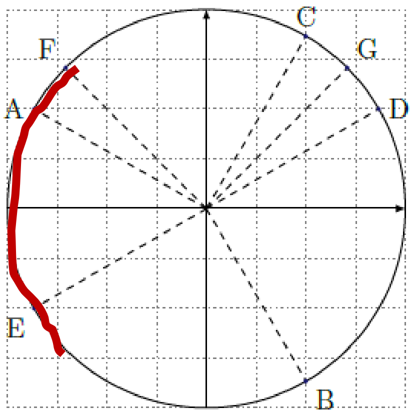
La mesure principale de l'angle associé à E est $\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.

La mesure principale de l'angle associé à G est $\frac{\pi}{4}$.

La mesure principale de l'angle associé à F est $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale de l'angle associé à C est $\frac{\pi}{3}$.

La mesure principale de l'angle associé à B est $-\frac{\pi}{3}$.



Exercice 2

1) $\frac{17\pi}{4} - 4\pi = \frac{\pi}{4}$; d'où $\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$; d'où $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $-\frac{19\pi}{2} + 10\pi = \frac{\pi}{2}$; d'où $\cos\left(-\frac{19\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

4) $-\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}$; d'où $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3

On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. D'où : $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sin^2(x) = 1$.

Par suite, $\sin^2(x) = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$.

Comme $x \in \left]-\frac{\pi}{2} \,;\, 0\right[$, alors $\sin(x) < 0$. Par conséquent, $\sin(x) = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Exercice 4

1) Voir cercle de l'exercice 1

2) $\mathscr{S} = \left]-\pi \,; -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4} \,; \pi\right[$.

Exercice 5

1) On a $f = 3u + v$ où $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 2x - 4$.

Comme u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$, alors f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Alors $f' = 3 \times u' + v'$ où $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = 2$.

Donc, **pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a** : $f'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2 = \frac{-3+2x^2}{x^2}$.

2) $f = uv$ où $u(x) = 4x + 1$ et $v(x) = 5 - x^2$.

$\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ v \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 4$ et $v(x) = 0 - 2x = -2x$, et **pour tout réel x,**

$f'(x) = 4 \times (5 - x^2) + (4x+1) \times (-2x) = 20 - 4x^2 - 8x^2 - 2x = -12x^2 - 2x + 20$.

3) $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = x + 1$.

f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$, et pour tout réel x de $]-1\,;+\infty[$,

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x + 0 = 2x$ et $v'(x) = 1$.

$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1 \times (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$

Exercice 6

1) D'après le résultat renvoyé par le programme, **le médicament est efficace entre 1 heure et 5 heures**.

2) $f = u - 12v + w$ où $u(x) = x^3$, $v(x) = x^2$ et $w(x) = 36x$.

Alors $f' = u' - 12v' + w'$ où $u'(x) = 3x^2$, $v'(x) = 2x$ et $w'(x) = 36$, **et pour tout réel x,**

$f'(x) = 3x^2 - 12 \times 2x + 36 = 3x^2 - 24x + 36$.

3) La tangente T a pour équation $y = f'(4) \times (x - 4) + f(4)$.

Or $f(4) = 4^3 - 12 \times 4^2 + 36 \times 4 = 16$ et $f'(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 36 = -12$; d'où

$y = -12 \times (x - 4) + 16 = -12x + 48 + 16 = -12x + 64$.

Par conséquent, **la tangente T a pour équation $y = -12x + 64$**.

4) $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

Or $(x-4)^3 = (x-4)^2 \times (x-4) = (x^2 - 8x + 16) \times (x - 4) = x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 32x + 16x - 64$,

c'est-à-dire $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

Par conséquent, **pour tout réel x, $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$**.

5) Comme $(x-4)^3 \leq 0$ lorsque $x \in [0\,;4]$ et $(x-4)^3 \geq 0$ lorsque $x \in [4\,;6]$, alors **$\mathscr{C}_f$ est en dessous de T sur $[0\,;\,4]$ et au-dessus de T sur $[4\,;\,6]$.**