CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Suites, trigonométrie	***Le 19 janvier 2024***

Exercice 1

1) $u_{n+1} - u_n = 2n$. Or $2n \geq 0$ pour tout entier naturel n ; donc (u_n) **est croissante**.

2) $u_{n+1} - u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - u_n = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} - u_n = u_n^2 + \frac{1}{4}$.

Or $u_n^2 + \frac{1}{4} > 0$ pour tout entier naturel n ; donc (u_n) **est strictement croissante**.

3) Comme $\frac{2^n}{3^n} > 0$ pour tout entier naturel n, comparons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

$u_n = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$.

Comme $\frac{2}{3} < 1$, alors (u_n) **est strictement décroissante**.

4) $u_n = n^2 - 6n + 1 = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.
f est une fonction du second degré avec $a = 1 > 0$, alors elle est strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[= [3\,;+\infty[$.
Par conséquent, (u_n) **est croissante à partir de $n = 3$**.

Exercice 2

1)

i	1	2	3
u	$\frac{1+0{,}5\times 2}{0{,}5+2} = \mathbf{0{,}8}$	$\frac{1+0{,}5\times 0{,}8}{0{,}5+0{,}8} \approx \mathbf{1{,}077}$	$\frac{1+0{,}5\times 1{,}077}{0{,}5+1{,}077} \approx \mathbf{0{,}976}$

2) **Il semble que les termes de la suite (u_n) se rapprochent de 1** (ou **il semble que la suite (u_n) converge vers 1**).

Exercice 3

1) $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$ et $-\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \pi$.

2) a) On cherche la valeur de l'entier k tel que $-\pi < \frac{263\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$.

Or $-\pi < \frac{263\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\pi - \frac{263\pi}{4} < 2k\pi \leq \pi - \frac{263\pi}{4}$, c'est-à-dire à $-\frac{267\pi}{4} < 2k\pi \leq -\frac{259\pi}{4}$.

D'où $-\pi < \frac{263\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\frac{267\pi}{4} \times \frac{1}{2\pi} < 2k\pi \leq -\frac{259\pi}{4} \times \frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire à $-\frac{267}{8} < k \leq -\frac{259}{8}$. Par suite, $k = -33$.

Par conséquent, **la mesure la mesure principale de $\frac{263\pi}{4}$** est $\frac{263\pi}{4} + (-33) \times 2\pi = \mathbf{-\frac{\pi}{4}}$.

3) a) Par division euclidienne on a : $1\,145 = 3 \times 381 + 2$.
Pour obtenir un nombre pair multiplié par 3, il est préférable d'écrire : $1\,145 = 3 \times 382 - 1$.

Par suite, $\frac{1145\pi}{3} = \frac{3 \times 382 - 1}{3} \times \pi = \left(\frac{3 \times 382}{3} - \frac{1}{3}\right) \times \pi = \left(382 - \frac{1}{3}\right) \times \pi = -\frac{\pi}{3} + 191 \times 2\pi$.

Par conséquent, **la mesure la mesure principale de $\frac{1145\pi}{3}$** est $\mathbf{-\frac{\pi}{3}}$.