

DEVOIR MAISON N° 7

Suite de Syracuse

Pour le 3 mars 2021

On appelle suite de Syracuse une suite (u_n) d'entiers naturels définie de la manière suivante

• le premier terme u_0 est un entier naturel non nul que l'on pourra choisir ;

• pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases} .$$

1) a) Que remarque-t-on lorsqu'on calcule les premiers termes de la suite de Syracuse en prenant $u_0 = 1$?

b) Le nombre 1 figure-t-il dans la suite de Syracuse lorsque $u_0 = 10$?

La conjecture de Syracuse, non démontrée à ce jour, s'énonce ainsi : « Quel que soit l'entier naturel choisi pour u_0 , le nombre 1 est atteint par un terme de la suite ».

Par ailleurs, l'observation de la suite montre que la suite peut s'élever assez haut avant de retomber. Les graphiques font penser à la chute chaotique d'un grêlon ou bien à la trajectoire d'une feuille emportée par le vent. De cette observation est né tout un vocabulaire imagé : on parle du *vol* de la suite et on définit alors :

le temps de vol : c'est le plus petit indice n tel que $u_n = 1$;

le temps de vol en altitude : c'est le plus petit indice n tel que $u_{n+1} < u_0$;

l'altitude maximale : c'est la valeur maximale de la suite.

2) L'objectif est de créer un algorithme permettant de déterminer le temps de vol de la suite.

a) Compléter le programme en Python ci-dessous.

```
def Syracuse(u):
    if u % 2 == 0:
        u = ...
    else:
        u = ...
    return u

def Liste_Syracuse(u):
    L=[u]
    while u != 1:
        L.append(Syracuse(u))
        u=Syracuse(u)
    return L
```

b) Quel nombre est renvoyé par `Syracuse(6)` ? `Syracuse(7)` ?

c) À quel test correspond `u%2== 0` ?

d) Quel est le rôle de la fonction `Syracuse` ?

3) a) Que retourne l'instruction : `Liste_Syracuse(14)` ?

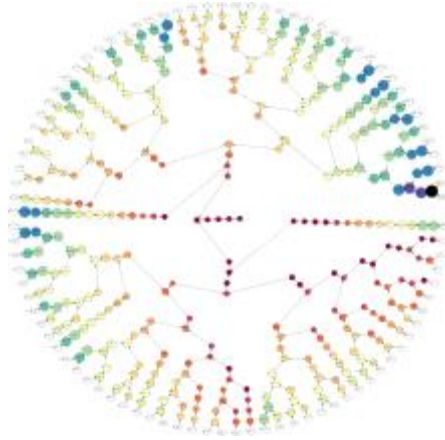
b) Que fait l'instruction : `L.append(Syracuse(u))` ?

c) Est-on sûr que pour tout entier naturel u non nul, `Liste_Syracuse(u)` renvoie une liste ?

4) On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur de la liste L et `max(L)` renvoie la plus grande valeur de la liste L .

a) Si $u_0 = 7$, quelle est le temps de vol de la suite et quelle est son altitude maximale ?

- b) Écrire un programme qui détermine la plus petite valeur u_0 qui donne un temps de vol supérieur à 100.
- c) Quelle est alors l'altitude de ce vol ?
- 5) Écrire un algorithme permettant d'obtenir le temps de vol en altitude pour une valeur donnée de u_0 .



[L'arbre reliant les nombres à durée de vol inférieure à 20](#)