CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 6	
Suites, Python	*Pour le 10 février 2021*

Exercice 1

1) $\boldsymbol{u_1} = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times 4 + 6 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} + 6 = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$.

$\boldsymbol{u_2} = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{25}{4} + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{23}{8}}$.

2) $\boldsymbol{u_3} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{23}{8}\right)^2 + 3 \times \frac{23}{8} - \frac{3}{2} \approx \boldsymbol{2{,}99219}$

$\boldsymbol{u_4} = -\frac{1}{2} \times (2{,}99219)^2 + 3 \times 2{,}99219 - \frac{3}{2} \approx \boldsymbol{2{,}99997}$.

3) **Il semble que la suite (u_n) soit croissante et qu'elle converge vers 3**.

4) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2$

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$**.

b) $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

Donc, **pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$**.

c) Comme $-1 \leq v_n \leq 0$, alors $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq \frac{1}{2}$; d'où $-\frac{1}{2} + 1 \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq \frac{1}{2} + 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq \frac{3}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{2}v_n + 1$ est strictement positif pour tout entier naturel n.

De plus, $-1 \leq v_n \leq 0$; par suite, $-v_n \geq 0$. Par conséquent, $-v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geq 0$, pour tout entier naturel n. Donc **la suite (v_n) est croissante**.

5) $u_n = v_n + 3$ et (v_n) est croissante. Donc **la suite (u_n) est croissante**.

Exercice 2

1) $\boldsymbol{u_2} = \frac{1+1}{3 \times 1}u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$; $\boldsymbol{u_3} = \frac{2+1}{3 \times 2}u_2 = \frac{3}{6} \times \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$ et $\boldsymbol{u_4} = \frac{3+1}{3 \times 3}u_3 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{4}{81}}$.

2)

```
def terme(N) :
    N=1
    U=1/3
    for i in range(N+1) :
        U=(N+1)*U/(3*N)
        N=N+1
    return U
```

3) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \dfrac{n+1}{3n(n+1)}u_n = \dfrac{u_n}{3n} = \dfrac{nv_n}{3n} = \dfrac{v_n}{3}$.

Donc **pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3}$**.

b)

n	u
1	0.3333
2	0.1111
3	0.037
4	0.0123
5	0.0041
6	0.0014
7	4.6E-4
8	1.5E-4
9	5.1E-5
10	1.7E-5
11	5.6E-6

Il semble que $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4) Comme $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, alors $u_n = nv_n$. D'où, **pour tout entier naturel n non nul, $u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$**.

5) $u_{n+1} - u_n = (n+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} - n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \left[(n+1)\times\dfrac{1}{3} - n\right] = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \left(-\dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{3}\right)$

D'où $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} \times (-2n+1)$

Or $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} > 0$ et $-2n+1 < 0$ pour tout entier naturel n non nul.

Par suite, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Par conséquent, **la suite (u_n) est décroissante**.