DEVOIR MAISON N° 6

Suites, Python	***Pour le 10 février 2021***

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$.

1) Calculer u_1 et u_2. On donnera les valeurs exactes *en détaillant les calculs*.

2) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près de u_3 et u_4.

3) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite éventuelle.

4) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 3$.

a) Démontrer que pour tout n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

b) Démontrer que $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

c) On admet que pour tout entier naturel n, $-1 \leq v_n \leq 0$.
En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

5) Quelle conjecture émise à la question 3) ce résultat sur le sens de variation de la suite (v_n) permet-il de justifier ?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}u_n.$$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4. On donnera les valeurs exactes *en détaillant les calculs*.

2) Proposer un algorithme en langage python afin de calculer le terme de rang n de la suite.

3) Soit (v_n) la suite, définie pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = \frac{u_n}{n}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$.

b) En calculant les premiers termes de la suite ((v_n), conjecturer la forme explicite de cette suite.

4) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

5) Étudier alors le sens de variation de la suite (u_n).