CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 5

Second degré et nombre dérivé	*Pour le 4 décembre 2020*

Exercice 1

1) $\boldsymbol{H(0)}=30\left[(0-5)\times(1-0)+(0-5)\times(0-2)\right]=30\times(-5+10)\boldsymbol{=150}$.

Le résultat est cohérent avec la situation car au départ (c'est-à-dire à l'instant $t=0$), **le caillou est à la hauteur de Liam, soit 150 cm ou encore 1,5 m**.

2) $H(2)=30\left[(2-5)\times(1-4)+(2-5)\times(2-2)\right]=30\times(9+0)=270$. Donc **la hauteur du caillou est à 2,70 mètres du sol après 2 secondes**.

3) $H(t)=30\left[(t-5)\times(1-2t)+(t-5)\times(t-2)\right]=30\left[(t-5)\times((1-2t)+(t-2))\right]$.

$H(t)=30\times(t-5)\times(-t-1)=30\times(t-5)\times(-1)\times(t+1)$.

Par conséquent, $\boldsymbol{H(t)=30(t+1)(5-t)}$.

4) Le caillou touche le sol lorsque $H(t)=0$; résolvons cette équation.

D'après la question précédente, $H(t)=0$ équivaut à $30(t+1)\times(5-t)=0$, c'est-à-dire à $t+1=0$ ou $5-t=0$.

Or $t+1=0$ équivaut à $t=-1$ (ce qui est impossible car t est positif), et, $5-t=0$ équivaut à $t=5$. Par conséquent, **le caillou touche le sol après 5 secondes**.

5) $t=2$

$a=t+1=2+1=3$

$b=t-5=2-5=-3$

$c=-30*a*b=-30\times3\times(-3)=270$

Donc **la valeur renvoyée par l'algorithme est 270**.

6) $H(t)=30(t+1)\times(5-t)=30\left(5t-t^2+5-t\right)=30\left(-t^2+4t+5\right)$.

Par suite, $H(t)=150$ équivaut à $30\left(-t^2+4t+5\right)=150$, c'est-à-dire à $-t^2+4t+5=\dfrac{150}{30}=5$,

ou encore à $-t^2+4t=0$.

Or $-t^2+4t=0$ équivaut à $t(-t+4)=0$, c'est-à-dire à $t=0$ ou $-t+4=0$.

Par conséquent, **les solutions de l'équation $\boldsymbol{H(t)=150}$ sont 0 et 4**.

Le caillou sera alors à 1,5 mètres du sol au départ et au bout de 4 secondes.

Exercice 2

1) $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=x\times x^2+x\times xy+x\times y^2-y\times x^2-y\times xy-y\times y^2$

$(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3=x^3-y^3$.

Donc $\boldsymbol{x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}$**, pour tous réels $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$**.

2) $(2+h)^3-8=(2+h)^3-2^3=(2+h-2)\left[(2+h)^2+(2+h)\times2+2^2\right]$.

D'où $\boldsymbol{(2+h)^3-8}=h\left[4+4h+h^2+4+2h+4\right]\boldsymbol{=h\left(h^2+6h+12\right)}$.

C. Lainé

3) **Le taux de variation de la fonction cube au point d'abscisse 2 est égal à**
$\dfrac{(2+h)^3-2^3}{h}=\dfrac{h\left(h^2+6h+12\right)}{h}=\boldsymbol{h^2+6h+12}$.

4) Comme $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-2^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(h^2+6h+12\right)=12$, alors **le nombre dérivé de la fonction cube au point d'abscisse 2 est égal à 2**.

5) L'équation de cette tangente est de la forme $y=f'(2)(x-2)+f(2)$.
Or $f'(2)=12$ et $f(2)=2^3=8$, d'où $y=12(x-2)+8=12x-24+8=12x-16$.
Donc l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2, est $\boldsymbol{y=12x-16}$.