

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3

Second degré et nombre dérivé

Pour le 24 novembre 2023

Exercice 1

1) $H(0) = 30[(0-5) \times (1-0) + (0-5) \times (0-2)] = 30 \times (-5+10) = 150$.

Le résultat est cohérent avec la situation car au départ (c'est-à-dire à l'instant $t = 0$), **le caillou est à la hauteur de Liam, soit 150 cm ou encore 1,5 m.**

2) $H(2) = 30[(2-5) \times (1-4) + (2-5) \times (2-2)] = 30 \times (9+0) = 270$. Donc **la hauteur du caillou est à 2,70 mètres du sol après 2 secondes.**

3) $H(t) = 30[(t-5) \times (1-2t) + (t-5) \times (t-2)] = 30[(t-5) \times ((1-2t) + (t-2))]$.

$$H(t) = 30 \times (t-5) \times (-t-1) = 30 \times (t-5) \times (-1) \times (t+1).$$

Par conséquent, **$H(t) = 30(t+1)(5-t)$.**

4) Le caillou touche le sol lorsque $H(t) = 0$; résolvons cette équation.

D'après la question précédente, $H(t) = 0$ équivaut à $30(t+1) \times (5-t) = 0$, c'est-à-dire à $t+1=0$ ou $5-t=0$.

Or $t+1=0$ équivaut à $t=-1$ (ce qui est impossible car t est positif), et, $5-t=0$ équivaut à $t=5$. Par conséquent, **le caillou touche le sol après 5 secondes.**

5) $t = 2$

$$a = t + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$b = t - 5 = 2 - 5 = -3$$

$$c = -30 * a * b = -30 \times 3 \times (-3) = 270$$

Donc **la valeur renvoyée par l'algorithme est 270.**

6) $H(t) = 30(t+1) \times (5-t) = 30(5t - t^2 + 5 - t) = 30(-t^2 + 4t + 5)$.

Par suite, $H(t) = 150$ équivaut à $30(-t^2 + 4t + 5) = 150$, c'est-à-dire à $-t^2 + 4t + 5 = \frac{150}{30} = 5$,

ou encore à $-t^2 + 4t = 0$.

Or $-t^2 + 4t = 0$ équivaut à $t(-t+4) = 0$, c'est-à-dire à $t = 0$ ou $-t+4 = 0$.

Par conséquent, **les solutions de l'équation $H(t) = 150$ sont 0 et 4.**

Le caillou sera alors à 1,5 mètres du sol au départ et au bout de 4 secondes.

Exercice 2

1) $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x \times x^2 + x \times xy + x \times y^2 - y \times x^2 - y \times xy - y \times y^2$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3.$$

Donc **$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$, pour tous réels x et y .**

2) $(2+h)^3 - 8 = (2+h)^3 - 2^3 = (2+h-2)[(2+h)^2 + (2+h) \times 2 + 2^2]$.

$$\text{D'où } (2+h)^3 - 8 = h[4 + 4h + h^2 + 4 + 2h + 4] = h(h^2 + 6h + 12).$$

3) **Le taux de variation de la fonction cube au point d'abscisse 2 est égal à**

$$\frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{h(h^2 + 6h + 12)}{h} = \mathbf{h^2 + 6h + 12} .$$

4) Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 12) = 12$, alors **le nombre dérivé de la fonction cube au point d'abscisse 2 est égal à 2.**

5) L'équation de cette tangente est de la forme $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

Or $f'(2) = 12$ et $f(2) = 2^3 = 8$, d'où $y = 12(x - 2) + 8 = 12x - 24 + 8 = 12x - 16$.

Donc l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2, est **$y = 12x - 16$** .