CALCUL VECTORIEL ET PRODUIT SCALAIRE

Plan de travail	*Première Spécialité maths*

NOM : ………………………………………… PRÉNOM : ……………………………………...

Parcours 1	**1** → **2** → **3** → 4 → **5** → **6** → **7** → **8** → **12** → **13** → **14** → **15** → **16** → **18** → **20**
Parcours 2	**1** → **2** → **3** → **4** → **5** → **6** → **7** → **8** → **9** → **10** → **11** → **12** → **13** → **14** → **15** → **16** → **17** → **18** → **19** → **20** → **21**

Exercice 1

Calculer $\vec{u} \bullet \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

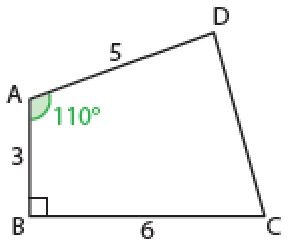
a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

b) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

À l'aide du quadrilatère ABCD ci-dessous, calculer les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$.



Exercice 3

On considère les points $A(2\ ;3)$, $B(-1\,;-2)$ et $C(-3\ ;4)$. Déterminer la valeur approchée à 0,01 près, en radian, de l'angle BAC.

Exercice 4

Déterminer une valeur en radian de l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ lorsque $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \bullet \vec{v} = -6$.

Exercice 5

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

2) En déduire $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

Exercice 6

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{u} \bullet \overrightarrow{AB}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A(-1\,;-2)$ et $B(-3\ ;6)$.

Exercice 7

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. Calculer :

1) $\vec{u}\bullet\vec{v}$; 2) $\left(2\vec{u}\right)\bullet\vec{v}$; 3) $\left(-\vec{u}\right)\bullet\left(3\vec{v}\right)$.

Exercice 8

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\left\|\vec{u}\right\|=6$, $\left\|\vec{v}\right\|=5$ et $\vec{u}\bullet\vec{v}=2$.

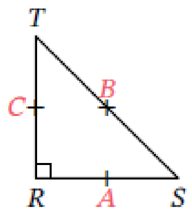
Calculer les expressions suivantes :

1) $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$; 2) $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$; 3) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

4) $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\bullet\left(3\vec{u}+\vec{v}\right)$.

Exercice 9

On considère le triangle RST isocèle et rectangle en R ci-dessous, tel que $RS=RT=4$, et les points A, B et C, milieux respectifs des côtés $[RS]$, $[ST]$ et $[RT]$.



En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1) $\overrightarrow{RT}\bullet\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{ST}\bullet\overrightarrow{RS}$;
3) $\overrightarrow{CS}\bullet\overrightarrow{SA}$; 4) $\overrightarrow{SB}\bullet\overrightarrow{CB}$.

Exercice 10

D'après le cours, si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$.
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 11

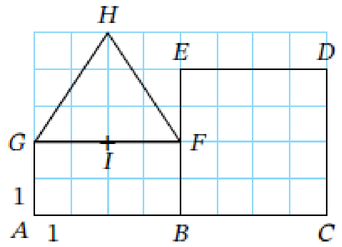
On considère un triangle OMN tel que $OM=5$, $ON=8$ et $MON=\frac{\pi}{4}$.
Déterminer MN (on pourra d'abord calculer $\overrightarrow{MN}^2$ en utilisant la relation de Chasles).

Exercice 12

On considère trois points $A(-1\,;1)$, $B(2\,;2)$ et $C(0\,;7)$, et, B' le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

1) Exprimer $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'.
2) En déduire CB', puis BB'.
3) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 13



En utilisant des projetés orthogonaux, calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BI}$; 3) $\overrightarrow{BH}\bullet\overrightarrow{CA}$;
4) $\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{FH}$; 5) $\overrightarrow{HG}\bullet\overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{GI}\bullet\overrightarrow{FD}$.

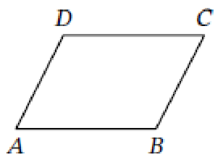
Exercice 14

C. Lainé

Exercice 15

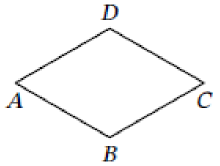
1) $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$

Calculer $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{DA}$.

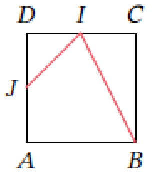


2) $ABCD$ est un losange de côté 4 et vérifiant $\widehat{BAD} = 60°$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

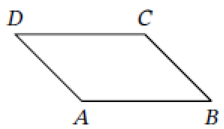


3) $ABCD$ est un carré de côté 1. I est le milieu de $[DC]$ et J celui de $[AD]$.Calculer $\overrightarrow{JI} \bullet \overrightarrow{BI}$.



4) $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $BD = 8$ et $\widehat{ABD} = 20°$.

Calculer $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BD}$ (arrondir à 0,1 près).



Exercice 16

On considère les points $A(1\,;3)$, $B(3\,;1)$, $C(-2\,;-2)$, $D(13\,;-5)$ $E(4\,;3)$.

1) Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
2) Les droites (AC) et (BD) sont-elles perpendiculaires ?
3) Les droites (BE) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

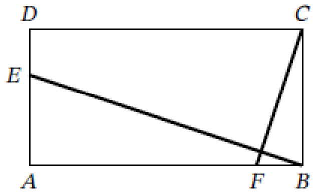
Exercice 17

On considère les points $A\left(\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7}\right)$, $B\left(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}\right)$ et $C\left(-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7}+2\sqrt{3}\right)$.

Montrer que ABC est rectangle en B.

Exercice 18

On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que : $AB = 6$, $AD = 3$, $E \in [AD]$ avec $AE = 2$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 5$.



Montrer que les droites (FC) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice 19

On considère trois points I, J et K du plan tels que $IJ = 4$, $IK = 5$ et $JK = 8$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI} \bullet \overrightarrow{IJ}$.
3) En déduire $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IK}$.
4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{JIK}$, arrondi à 0,1 près.

Exercice 20

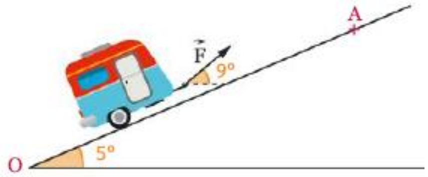
Que fait l'algorithme suivant ?

```
xu=float(input("xu="))
yu=float(input("yu="))
xv=float(input("xv="))
yv=float(input("yv="))
p=xu*xv+yu*yv
print("p=",p)
```


C. Lainé

Exercice 21

La famille Garomaths part en vacances. Elle a une caravane accrochée derrière sa voiture et elle roule sur une route de montagne de 10 km, inclinée d'un angle de 5° par rapport à l'horizontale.



La traction de la caravane est modélisée par une force $\vec{F}$ d'intensité 15 000 newtons, inclinée d'un angle de 9° par rapport à l'horizontale. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ sur cette route. Donner l'écriture scientifique du résultat en faisant attention aux chiffres significatifs.

Bilan

Numéro de mon parcours : ……

J'ai fait tous les exercices de mon parcours : ☐ OUI ☐ NON

Numéros des exercices plus difficiles pour moi (et que je dois revoir) : ……………………

	Compétences	***M***	***NM***
C11-1	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant des normes		
C11-2	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant des normes et un angle		
C11-3	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant des coordonnées		
C11-4	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant des distances		
C11-5	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant la projection orthogonale		
C11-6	Calculer des longueurs et des mesures d'angles		
C11-7	Utiliser les propriétés du produit scalaire		
C11-8	Démontrer une orthogonalité		

CORRECTIONS

Exercice 1 a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 5\sqrt{3}$; b) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{21}{2}\sqrt{2}$	**Exercice 2** $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} \approx -5{,}13$ et $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$
Exercice 3 $BAC \approx 1{,}23$ rad	**Exercice 4** $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{2\pi}{3}$
Exercice 5 1) $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{40}$, $\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{34}$ et $\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert = \sqrt{122}$. 2) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 24$.	**Exercice 6** 1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 11$; 2) $\vec{u} \bullet \overrightarrow{AB} = 22$
Exercice 7 1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 18$; 2) $\left(2\vec{u}\right) \bullet \vec{v} = 36$; 3) $\left(-\vec{u}\right) \bullet \left(3\vec{v}\right) = -54$	**Exercice 8** 1) $\lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert = \sqrt{57}$; 2) $\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert = \sqrt{65}$; 3) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}+\vec{v}\right) = 11$; 4) $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right) \bullet \left(3\vec{u}+\vec{v}\right) = 172$.
Exercice 9 On choisit le repère $\left(R\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{RS}, \frac{1}{4}\overrightarrow{RT}\right)$. 1) $\overrightarrow{RT} \bullet \overrightarrow{AC} = 8$; 2) $\overrightarrow{ST} \bullet \overrightarrow{RS} = -16$; 3) $\overrightarrow{CS} \bullet \overrightarrow{SA} = -8$; 4) $\overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{CB} = 4$.	**Exercice 10** Non. Il suffit de trouver un contre exemple.
Exercice 11 $MN = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}$	**Exercice 12** 1) $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \sqrt{37} \times CB'$ 2) $CB' = \frac{28}{\sqrt{37}}$ et $BB' = \frac{17\sqrt{37}}{37}$. 3) L'aire de ABC est égale à 8,5 u.a.
Exercice 13 1) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 32$; 2) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BI} = -8$; 3) $\overrightarrow{BH} \bullet \overrightarrow{CA} = 16$ 4) $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{FH} = 12$; 5) $\overrightarrow{HG} \bullet \overrightarrow{BC} = -8$; 6) $\overrightarrow{GI} \bullet \overrightarrow{FD} = 8$.	**Exercice 15** 1) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{DA} = -14{,}5$; 2) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 8$; 3) $\overrightarrow{JI} \bullet \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}$; 4) $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BD} \approx 37{,}6$
Exercice 16 1) (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires. 2) (AC) et (BD) sont perpendiculaires. 3) (BE) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.	**Exercice 17** Il faut calculer $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$
Exercice 18 On peut utiliser un repère orthonormé et montrer que $\overrightarrow{FC} \bullet \overrightarrow{BE} = 0$.	**Exercice 19** 2) $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI}$. 3) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = -11{,}5$. 4) $\widehat{JIK} \simeq 125{,}1°$
Exercice 20 Il calcule le produit scalaire de deux vecteurs.	**Exercice 21** Le travail est égal à $\vec{F} \bullet \overrightarrow{OA}$ joules $\vec{F} \bullet \overrightarrow{OA} = 15000 \times 10000 \times \cos\left(9-5\right) \approx 1{,}5 \times 10^{8}$