SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

Plan de travail	*Première Spécialité maths*

NOM : ………………………………………… PRÉNOM : …………………………………...

Parcours 1	**1 → 2 → 3 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 13 → 14 → 16 → 18** **30 ← 28 ← 26 ← 25 ← 24 ← 22 ← 20 ← 19**
Parcours 2	**1 → 3 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 13 → 16 → 18 → 19** **30 ← 29 ← 26 ← 25 ← 24 ← 22 ← 20**
Parcours 3	**1 → 4 → 5 → 6 → 8 → 9 → 10 → 12 → 13 → 15 → 17 → 18 → 21** **31 ← 29 ← 27 ← 25 ← 24 ← 23 ← 21**

Exercice 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 2$.

Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_{20}.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ telle que $u_4 = 9$.

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_0.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_3 = -1$. Calculer u_0.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_6 = -1$. Déterminer la valeur de la raison de cette suite.

Exercice 6

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Justifier.

a) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 4$.

b) (v_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = -n + 3$.

c) (w_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $w_n = n^2 - 3$.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -1$.

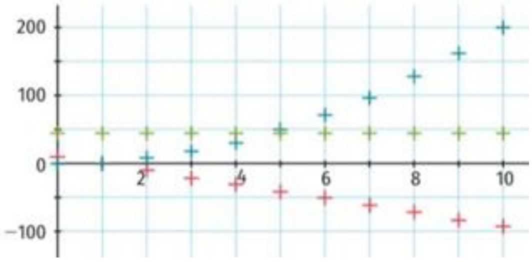
Calculer la somme des 20 premiers termes de cette suite.

Exercice 8

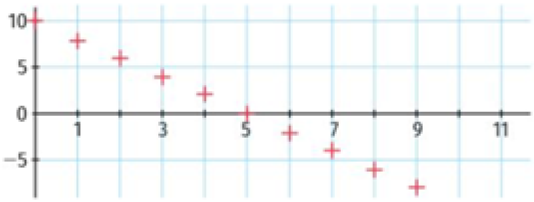
Calculer la somme des 100 premiers entiers naturels.

C. Lainé

Exercice 9
Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles représentent des modèles discrets à croissance linéaire ?



Exercice 10
Soit (u_n) une suite arithmétique dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.
Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.



Exercice 11
Étudier les variations des suites ci-dessous.

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

2) (v_n) définie par $v_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 5$.

Exercice 12
Soit (u_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n^2 + 5n - 2}{n+2}$. Déterminer les variations de (u_n).

Exercice 13
Evaluation autonome en 10 minutes (sans la calculatrice, ni EduPython).

Exercice 14
On s'intéresse à une échelle dont le premier barreau se trouve à une hauteur de 10 cm du sol. Il y a ensuite 30 cm entre chaque barreau.

1) a) À quelle hauteur le deuxième barreau sera t-il ?
b) À quelle hauteur le troisième barreau sera-t-il ?

2) On note u_n la hauteur par rapport au sol du n-ième barreau de l'échelle.
a) Déterminer la valeur de u_1.
b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 15
Une famille décide d'épargner afin de pouvoir s'offrir un voyage en Égypte.
La première année, elle économise 500 euros. Chaque année, elle augmente la somme épargnée de 100 euros.
Pour $n \geq 1$, on note s_n la somme épargnée l'année n.

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.

2) En déduire une expression de s_n en fonction de n.

3) Déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage sachant que le voyage coûte 4 200 euros.

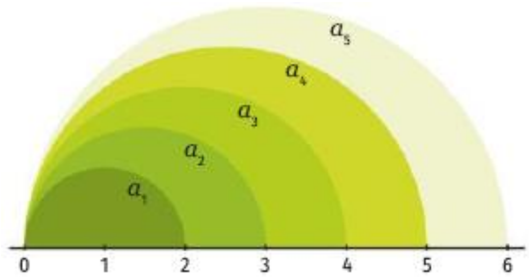
Exercice 16

On souhaite empiler des allumettes.
Pour n entier naturel non nul, on note a_n le nombre d'allumettes nécessaires pour construire la ligne du niveau n.

1) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
2) Exprimer a_n en fonction de n avec n entier naturel non nul, puis en déduire la nature de la suite (a_n).
3) Combien d'allumettes totales seront nécessaires pour construire la dixième étape ?

Exercice 17

On construit des demi-disques comme sur la figure ci-dessous. L'unité est le centimètre.



Pour tout entier naturel n non nul, on note a_n la longueur du demi-cercle correspondant de rang n supérieur ou égal à 1.

1) Exprimer a_n en fonction de n.
2) Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
3) Pourra-t-on obtenir un demi-cercle dont la longueur sera supérieure à 25 cm ? Si oui, à quelle étape ?

Exercice 18

Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 0,5$.

Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 19

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -1$.

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_{10}.

Exercice 20

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_5 = 2$.

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_0.

Exercice 21

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 12$. Calculer u_0.

Exercice 22

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = -3$ et $u_1 = 4$. Déterminer la valeur de la raison de cette suite.

Exercice 23

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q strictement positive telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 1$. Déterminer la valeur de la raison de cette suite.

Exercice 24

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -9$.

Calculer la somme des 15 premiers termes de cette suite.

Exercice 25

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Justifier.

a) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$.

b) (v_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = -3^n$.

c) (w_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{4^n}$.

d) (a_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 26

Étudier les variations des suites ci-dessous.

1) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

2) (v_n) définie par $v_0 = -2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5 \times v_n$.

Exercice 27

Soit (u_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$. Déterminer les variations de (u_n).

Exercice 28

Evaluation autonome en 10 minutes (sans la calculatrice, ni EduPython).

Exercice 29

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 2.

1) Écrire la relation entre u_n et u_{n+1}.

2) On considère l'algorithme ci-dessous

```
N=0
U=5
while U<100:
    U=2*U
    N=N+1
```

À la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable N est égale à 5. Interpréter cette valeur.

Exercice 30

Au début d'une infection, la concentration de bactéries dans un organisme s'élevait à 1 000 bactéries par mm^3 de sang. Pour tout entier naturel n, on note b_n le nombre de bactéries n jours après le début de l'infection. On admet que le traitement antibiotique administré au malade permet de diviser chaque jour le nombre de bactéries par 3.

1) Justifier que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2) Déterminer le sens de variation de (b_n) ? Justifier.

3) Au bout de combien de temps la concentration de bactéries deviendra-t-elle inférieure à dix bactéries par mm^3 ?

4) Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de retrouver le résultat de la question précédente.

```
def seuil() :
  b=1000
  n=0
  while ......:
    b=......
    n=......
  return ......
```

Exercice 31

Une banque propose deux options de placement :
- Placement A : on dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6 % du capital de départ.
- Placement B : on dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4 % du capital de l'année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200 €. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre.

On note u_n la valeur du capital après n années pour le placement A et v_n la valeur du capital après n années pour le placement B.

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Calculer v_1, v_2 et v_3.

2) Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? On donnera le premier terme et la raison.

3) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

4) Déterminer le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 32

Un triangle de Sierpinski se dessine en commençant par tracer un triangle équilatéral dont l'aire vaut 1.
A la premiere étape, on marque le milieu de chacun de ses côtés et on enlève le triangle au centre. Puis on répète l'opération avec les trois triangles restants et ainsi de suite.
(les différentes étapes à l'aide de GeoGebra)

étape 0 étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

1) Quelle est l'aire de la partie colorée à l'étape 0 ? à l'étape 1 ? à l'étape 2 ?

2) Par quelle opération passe-t-on de l'aire colorée de l'étape n à l'aire colorée de l'étape $n+1$?

3) On note (a_n) la suite qui modélise l'aire colorée à chaque étape.
Justifier que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_n en fonction de n.

5) En utilisant la calculatrice ou le tableur, déterminer la plus petite valeur de n telle que $a_n < 0{,}1$.

Exercice 33

Jade et Liam font un tournoi de 5 mini-jeux sur un jeu vidéo. Jade obtient un score de 5 000 et Liam un score de 3 500. Liam décide alors de s'entraîner chaque semaine pour battre le record de Jade. Chaque semaine, il améliore son score de 5 %. Au bout de combien de semaines battra-t-il le record de Jade ?

Exercice 34

Jade décide de courir un marathon (42,195 km). Mais elle s'essouffle vite. Elle parcourt la moitié de la distance et fait une pause.
Elle reprend alors la course et parcourt de nouveau la moitié de la distance qu'il reste et fait encore une pause. Et ainsi de suite.

1) Combien de pauses faut-il parcourir 42,194 km ?

2) Elle ne peut pas faire un pas de moins de 10 cm. Après combien de pauses terminera-t-elle le marathon ?

Bilan

Numéro de mon parcours : ……

J’ai fait tous les exercices de mon parcours : ☐ OUI ☐ NON

Numéros des exercices plus difficiles pour moi (et que je dois revoir) : ……………………

Compétences		***M***	***NM***
C08-1	Démontrer qu’une suite est arithmétique et déterminer ses éléments caractéristiques		
C08-2	Déterminer le terme général d’une suite arithmétique		
C08-3	Déterminer les variations d’une suite arithmétique		
C08-4	Calculer une somme de termes d’une suite arithmétique		
C08-5	Modéliser un problème à l’aide d’une suite arithmétique		
C08-6	Démontrer qu’une suite est géométrique et déterminer ses éléments caractéristiques		
C08-7	Déterminer le terme général d’une suite géométrique		
C08-8	Déterminer les variations d’une suite géométrique		
C08-9	Calculer une somme de termes d’une suite géométrique		
C08-10	Modéliser un problème à l’aide d’une suite géométrique		
C05-8	Mettre en œuvre un algorithme permettant de calculer un terme d’une suite à un rang donné		
C05-9	Mettre en œuvre un algorithme permettant d’obtenir une liste de termes d’une suite		
C05-10	Mettre en œuvre un algorithme permettant d’obtenir une somme de termes d’une suite		

CORRECTIONS

Exercice 1 $u_1 = 6$; $u_2 = 10$; $u_3 = 14$	**Exercice 2** 1) $u_n = -3 + 2n$; 2) $u_{20} = 37$
Exercice 3 1) $u_n = u_0 + 1{,}5n$; 2) $u_0 = 3$	**Exercice 4** $u_0 = -10$
Exercice 5 $r = -1{,}25$	**Exercice 6** a) (u_n) est une suite arithmétique de raison – 4 b) (v_n) est arithmétique de raison – 1 c) (w_n) n'est pas arithmétique
Exercice 7 $S = 360$	**Exercice 8** $S = 5\,050$
Exercice 9 La verte	**Exercice 10** $u_n = 10 - 2n$
Exercice 11 1) (u_n) est strictement croissante. 2) (v_n) est strictement décroissante.	**Exercice 12** (u_n) est strictement croissante.
Exercice 14 1) a) le deuxième barreau est à 40 cm du sol b) le troisième barreau est à 70 cm du sol 2) a) $u_1 = 10$ b) $u_{n+1} = u_n + 30$ c) $u_n = -20 + 30n$	**Exercice 15** 1) $S_{n+1} = S_n + 100$ 2) $S_n = 400 + 100n$ 3) La famille pourra donc partir en voyage au bout de 6 ans.
Exercice 16 1) $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$ et $a_3 = 8$ 2) $a_n = 2n$; (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 2$ 3) Il faudra 110 allumettes	**Exercice 17** 1) $a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n$ 2) (a_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$ et de premier terme $a_1 = \pi$ 3) À la 15ème étape, la longueur de l'arc du demi-disque sera supérieure à 25 cm.
Exercice 18 $u_1 = -1$; $u_2 = 2$; $u_3 = -4$	**Exercice 19** 1) $u_n = -3^n$; 2) $u_{10} = -59\,049$
Exercice 20 1) $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$; 2) $u_0 = 64$	**Exercice 21** $u_0 = 1{,}5$
Exercice 22 $q = -\frac{4}{3}$	**Exercice 23** $q = \frac{1}{2}$

Exercice 24 $S = -294\ 903$	**Exercice 25** a) (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 b) (v_n) est géométrique de raison 3 c) (w_n) est géométrique de raison 0,25 d) (a_n) n'est pas géométrique
Exercice 26 1) (u_n) est strictement croissante. 2) (v_n) est strictement croissante.	**Exercice 27** (u_n) est strictement croissante.
Exercice 29 1) $u_{n+1} = 2 \times u_n$ 2) 5 est la plus petite valeur de n pour que u_n soit supérieure ou égale à 100	**Exercice 30** 1) (b_n) est une suite géométrique de raison 1/3 et de premier terme $u_0 = 1000$. 2) (b_n) est strictement décroissante 3) la concentration de bactéries deviendra inférieure à dix bactéries par mm^3 au bout de 5 jours
Exercice 31 1) a) $u_1 = 212$; $u_2 = 224$ et $u_3 = 236$ b) $v_1 = 208$; $v_2 = 216{,}32$ et $v_3 = 224{,}97$ 2) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $r = 12$. (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 200$ et de raison $q = 1{,}04$. 3) $u_n = 200 + 12n$ et $v_n = 200 \times 1{,}04^n$ 4) Le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$ est 21. Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.	**Exercice 32** 1) étape 0 = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; étape 1 = $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$; étape 2 = $\dfrac{9\sqrt{3}}{64}$ 2) On la multiplie par 0,75 3) (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. 4) $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$; 5) 2 est la plus petite valeur de n telle que $a_n < 0{,}1$.
Exercice 33 On note u_n le score de Nicolas après n semaines d'entrainement. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme 3 500. Liam battra Jade après 8 semaines d'entrainement.	**Exercice 34** 1) On note S_n la distance totale parcourue depuis le début de la course au moment de la n-ième pause. $S_n = 42{,}195 \times \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}\right)$ Pour parcourir 42,194 km, elle devra faire 15 pauses. 2) Comme elle ne peut pas faire un pas de moins de 10 cm, on cherche pour quelle valeur de n on a $S_n > 42{,}1949$. Elle devra donc faire 19 pauses pour terminer le marathon.