# APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

| *Plan de travail* | *Première Spécialité maths* |
|---|---|

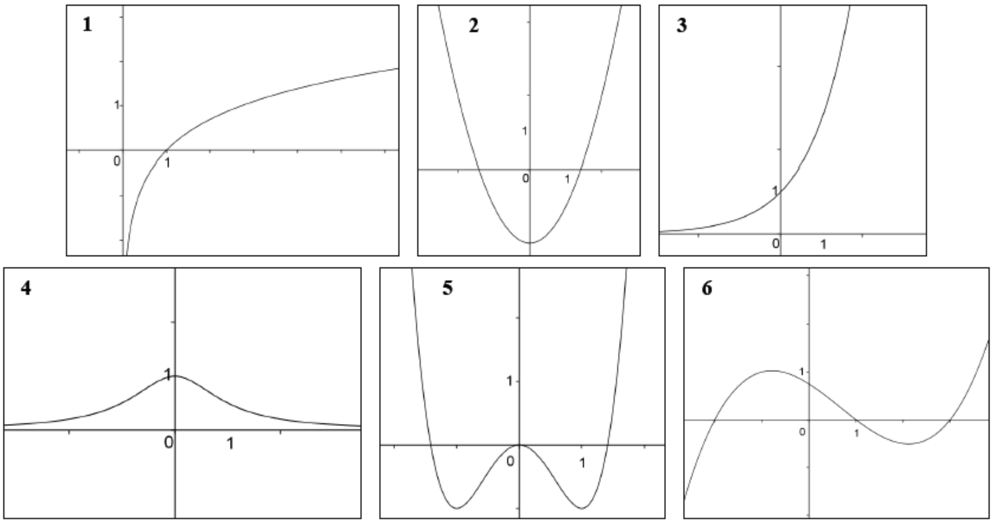
NOM : …………………………………………… PRÉNOM : ……………………………………...

| | |
|---|---|
| **Parcours 1** | **1 → 2 → 3 → 5 → 7 → 8 → 11 → 12** |
| **Parcours 2** | **1 → 2 → 4 → 5 → 7 → 9 → 11 → 12** |
| **Parcours 3** | **1 → 2 → 4 → 6 → 8 → 10 → 11 → 13** |

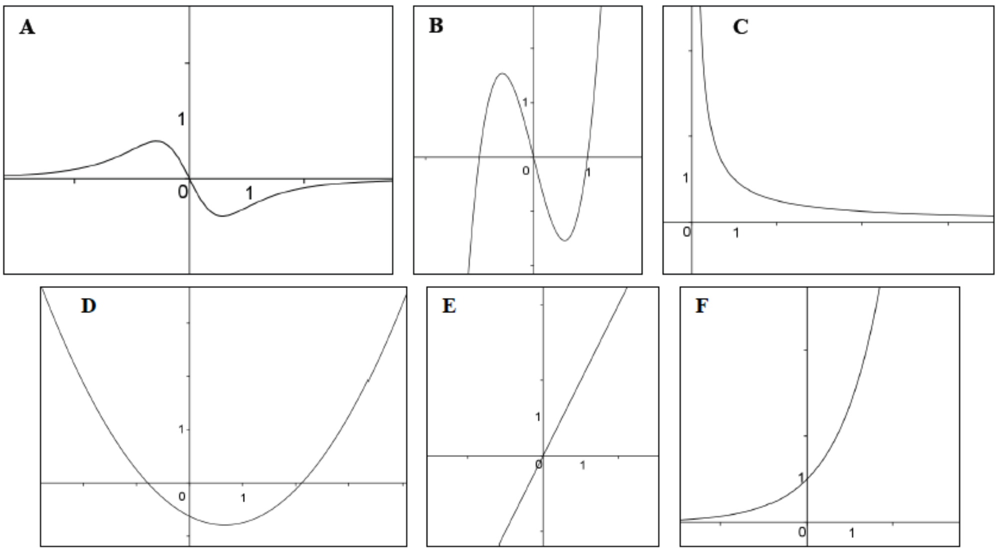
**Exercice 1**

Associer la courbe représentative d'une fonction à celle de sa dérivée. *Justifier*.

**Courbes représentatives des fonctions**




**Courbes représentatives des fonctions dérivées**



**Exercice 2**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2+2x+3$.

a) Calculer la fonction dérivée $f'$ de $f$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

**Exercice 3**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-45x+21$.

a) Calculer la fonction dérivée $f'$ de $f$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

**Exercice 4**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+3x^2+5x+4$.

a) Calculer la fonction dérivée $f'$ de $f$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

**Exercice 5**

Soit la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;5[\cup]5\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3-2x}{x-5}$.

Étudier les variations de $f$.

**Exercice 6**

Soit la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+5}{x+1}$.

a) Calculer la fonction dérivée $f'$ de $f$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

d) L'équation $f(x)=1$ a-t-elle une solution sur $[0\,;9]$ ?

**Exercice 7**

Soit la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer le tableau de variations de la fonction $f$.

2) Quels sont les extremums locaux de la fonction $f$ ?

**Exercice 8**

Une entreprise fabrique des meubles en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.
Pour $x$ meubles fabriqués et vendus, le coût de production journalier, exprimé en euros, noté $C(x)$, est donné par $C(x)=2{,}25x^2-6x+20$.
Chaque meuble est vendu 299 €.

1) On appelle $R(x)$ les recettes de l'entreprise pour $x$ meubles vendus. Déterminer $R(x)$.

2) Montrer que le bénéfice journalier correspondant à la vente de $x$ meubles, est donné par $B(x)=-2{,}25x^2+305x-20$.

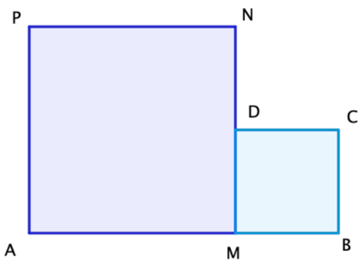
3) Calculer $B'(x)$.

4) En déduire le tableau de variations de $B$ sur $[0\,;100]$.

5) Combien de meubles faut-il produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Que vaut alors ce bénéfice ?

## Exercice 9

Soit un segment $[AB]$ de longueur 10 et $M$ un point de ce segment.
Du même côté de ce segment, on construit deux carrés *AMNP* et *MBCD*.
On pose $AM = x$ et on étudie l'aire du domaine formé par ces deux carrés en fonction de $x$.




1) A quel intervalle $\mathrm{I}$ appartient le réel $x$ ?

2) Soit $f(x)$ l'aire du domaine.

Montrer que, pour tout $x$ réel de $\mathrm{I}$, on a : $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

3) Justifier que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathrm{I}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x$ de $\mathrm{I}$.

4) En déduire les variations de $f$ sur $\mathrm{I}$ et la valeur de $x$ pour laquelle l'aire du domaine est minimale.

## Exercice 11

Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

## Exercice 12

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = -3x^2 + 9x + 1$
Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) a) Déterminons, pour tout réel $x$, $h'(x)$

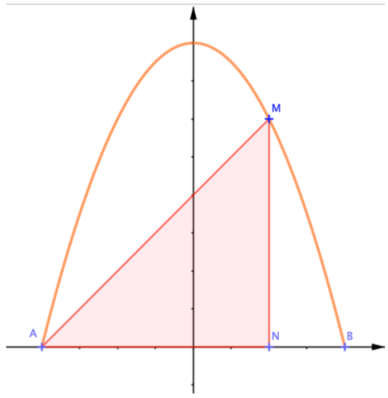
b) Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que la fonction $h$ est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

3) Calculer $h(2)$. Que peut-on en déduire ?

## Exercice 10

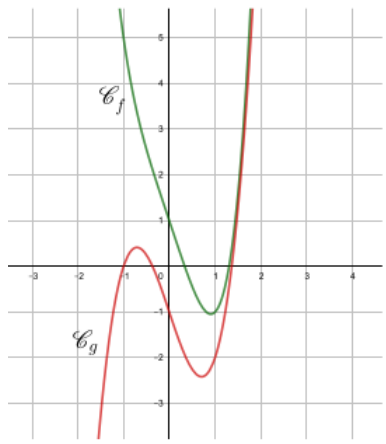
La parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en *A* et en *B*.
Le point *M* d'abscisse $x$ se déplace sur la parabole entre *A* et *B*.
Le point *N* est le projeté orthogonal de *M* sur l'axe des abscisses.




Déterminer la position du point *M* qui maximise l'aire du triangle *AMN*.

## Exercice 13

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$. On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions $f$ et $g$.




La courbe $\mathscr{C}_f$ est-elle toujours au-dessus de $\mathscr{C}_g$ ? Justifier.

# Bilan

Numéro de mon parcours : ……

J’ai fait tous les exercices de mon parcours : ☐ OUI ☐ NON

Numéros des exercices plus difficiles pour moi (et que je dois revoir) : ……………………

| ***Compétences*** | | ***M*** | ***NM*** |
|---|---|---|---|
| **C15-1** | Étudier les variations d’une fonction | | |
| **C15-2** | Déterminer les extremums d’une fonction | | |
| **C15-3** | Résoudre un problème d’optimisation | | |
| **C15-4** | Exploiter les variations d’une fonction pour établir une inégalité | | |
| **C15-5** | Étudier la position relative de deux courbes représentatives | | |

# CORRECTIONS

| | |
|---|---|
| **Exercice 1**<br>1 et C ; 2 et E ; 3 et F ; 4 et A ; 5 et B ; 6 et D | **Exercice 2**<br>a) $f'(x)=10x+2$.<br>b) $f'(x)\geq 0$ sur $[-0,2\ ;+\infty[$ et $f'(x)\leq 0$ sur $]-\infty\ ;\ -0,2]$. |
| **Exercice 3**<br>a) $f'(x)=3x^2+6x-45=3(x^2+2x-15)$.<br>b) $f'(x)\geq 0$ sur $]-\infty\ ;\ -0,2]\cup[3\ ;+\infty[$ et $f'(x)\leq 0$ sur $[-5\ ;3]$. | **Exercice 4**<br>a) $f'(x)=6x^2+6x+5$<br>b) $f'(x)<0$ sur $\mathbb{R}$ |
| **Exercice 5**<br>$f'(x)=\dfrac{7}{(x-5)^2}$ et *f* est strictement croissante sur *D<sub></sub>*$D_f$ | **Exercice 6**<br>a) $f'(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^2}$ ; b) $f'(x)<0$ sur $D_f$<br>c) *f* est strictement croissante sur $D_f$<br>d) non |
| **Exercice 7**<br>1) *f* est strictement croissante sur $]-\infty\ ;-1]\cup[1\ ;+\infty[$, et décroissante sur $[-1\ ;0[\cup]0\ ;1]$<br>2) Les extremums locaux sont 0 et - 2 | **Exercice 8**<br>1) $R(x)=299x$<br>2) $B(x)=-2,25x^2+305x-20$<br>3) $B'(x)=-4,5x+305$<br>4) *B* est croissante sur $\left[0\ ;\dfrac{610}{9}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{610}{9}\ ;100\right]$<br>5) Il faut vendre environ 68 meubles pour réaliser un bénéfice maximal et le bénéfice maximal est $B(68)$ |
| **Exercice 9**<br>1) $x$ appartient à [0 ; 10]<br>2) facile<br>3) $f'(x)=4x-20$ ; 4) l'aire du domaine est minimale pour $x = 5$ | **Exercice 10**<br>L'aire du triangle est égale à $A(x)=-0,25x^3-x^2+4x+16$.<br>Après avoir étudié les variations de cette fonction sur [-4 ; 4], l'aire est maximale pour $x = 4/3$ |
| **Exercice 11**<br>Soit $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-2$.<br>Démontrer que le minimum de *f* est 0, atteint en 1, après avoir dressé le tableau de variation, puis conclure. | **Exercice 12**<br>1) a) $h'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$<br>b) $h'(x)\geq 0$ sur $]-\infty\ ;\ -3]\cup[1\ ;+\infty[$ et $h'(x)\leq 0$ sur $[-3\ ;1]$.<br>2) conséquence du 1) b)<br>3) $h(2)=1$ ; d'où pour tout $x$ supérieur ou égal à 2, $h(x)>0$. Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[2\ ;+\infty[$ |
| **Exercice 13**<br>$h(x)=f(x)-g(x)=x^4-2x^3+2$<br>*h* admet un minimum en 1,5, et $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{16}$ qui est strictement positif.<br>Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$. | |