APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

Objectifs :

- *Étudier les variations d'une fonction.*
- *Déterminer les extremums.*
- *Résoudre un problème d'optimisation.*
- *Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité.*
- *Étudier la position relative de deux courbes représentatives.*
- *Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2.*

1. Dérivées et sens de variation

Théorème 1 *(admis)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

• Si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

• Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exercice ❶

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = -1$.
On donne le signe de la dérivée. Compléter le tableau de variations.

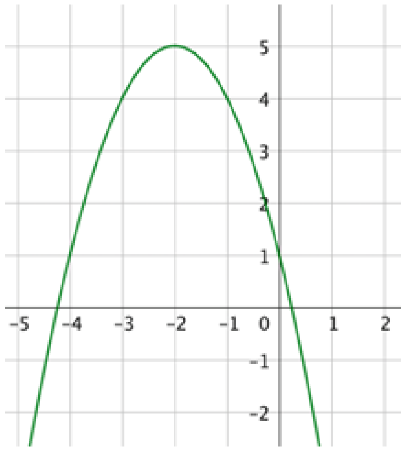
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f					

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(4) = 3$.
On donne les variations de la fonction f. Compléter le tableau avec le signe de la dérivée.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f			

3) On donne la représentation graphique de la fonction f. Compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		0	
f			



[corrigé en vidéo]

Exercice ❷

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

a) Calculer la fonction dérivée f' de f.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

c) Dresser le tableau de variations de f.

[corrigé en vidéo]

Exercice ❸

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 5$.

a) Calculer la fonction dérivée f' de f.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

c) Dresser le tableau de variations de f.

[corrigé en vidéo]

Exercice ❹

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$.

a) Calculer la fonction dérivée f' de f.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

c) Dresser le tableau de variations de f.

[corrigé en vidéo]

2. Extremum d'une fonction

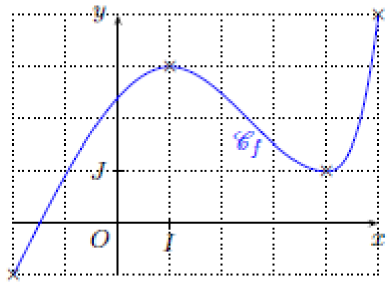
Définition 1. ***Notion d'extrémum local***

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathbf{I}$ et c un réel de $\mathbf{I}$ distinct des extrémités.

• On dit que f admet un maximum local en c si $f(c)$ est le maximum de f restreinte à un intervalle ouvert contenant c.

• On dit que f admet un minimum local en c si $f(c)$ est le minimum de f

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-2\ ;\ 5]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le repère (O ; I ; J) ci-dessous :



4 est le maximum de la fonction f sur $[-2\ ;\ 5]$ et il est atteint pour $x=5$.

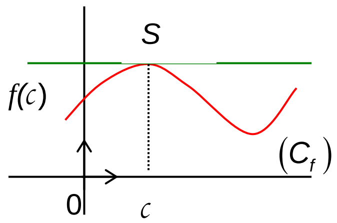
-1 est le minimum de la fonction f sur $[-2\ ;\ 5]$ et il est atteint pour $x=-2$.

3 est un maximum local de la fonction f. En effet, pour tout x de $]0\ ;\ 2[$, $f(x)\leq 3$.

1 est un minimum local de la fonction f. En effet, pour tout x de $]3\ ;\ 5[$, $f(x)\geq 1$.

Théorème 2 ***(admis).*** ***Lien d'un extremum avec la dérivation***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ et c un réel de $\mathbf{I}$. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c)=0$.



Conséquences graphiques : On a $f'(c)=0$; on en déduit que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en S est nul ; la tangente est horizontale.

Remarques : • Il est important que $\mathbf{I}$ soit ouvert.
Par exemple, $f : x \mapsto x^2$ et $\mathbf{I}$ = [0 ; 1], $f(1)=1$ est le maximum de f sur $\mathbf{I}$ et pourtant $f'(1)=2$ …

• Une fonction non dérivable en un réel, peut admettre un extremum en ce réel.

Par exemple, la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 et pourtant elle admet un extremum local en 0.

• La réciproque de ce théorème est fausse. *(Si* $f'(c)=0$, *on n'a pas forcément un extremum en c …)*

Par exemple, $f : x \mapsto x^3$, $f'(0)=0$ et pourtant $f(0)=0$ n'est pas un extremum local de f…

Théorème 3 *(admis)*. *Existence d'un extremum*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathbf{I}$.
Si la dérivée f' s'annule en un réel a distinct de $\mathbf{I}$ en changeant de signe alors f admet en a un extremum local.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur* **R** *par f(x) = 5x² - 3x + 4 .*
Cette fonction admet-elle un extremum sur R ?

La fonction f est dérivable sur **R** en tant que fonction polynôme.

$f=5u+v$ où $u(x)=x^2$ et $v(x)=-3x+4$.
Alors $f'=5u'+v'$ où $u'(x)=2x$ et $v(x)=-3$, et pour tout réel x, $f'(x)=10x-3$.
Or : $f'(x)=0$ lorsque $x=\dfrac{3}{10}$; $f'(x)>0$ lorsque $x>\dfrac{3}{10}$ et $f'(x)<0$ lorsque $x<\dfrac{3}{10}$.

Comme la dérivée f' s'annule en changeant de signe en $x=\dfrac{3}{10}$, alors f admet un minimum en $\dfrac{3}{10}$. Ce minimum est $f\left(\dfrac{3}{10}\right)=\dfrac{71}{20}$.

Exercice ❺

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-10x+1$.

a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variations de f.
d) En déduire que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$.

corrigé en vidéo

Exercice ❻

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+4x-5$.

a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) Vérifier que 1 est une racine de f.
c) Dresser le tableau de variations de f.
d) En déduire le signe de $f(x)$.

corrigé en vidéo

Exercice ❼

Soient f et g deux fonctions définies sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x)=x^3$ et $g(x)=-5x+18$.

Étudier la position relative des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

corrigé en vidéo

Exercice ❽

Une entreprise fabrique des composants pour ordinateur. Pour une quantité x, exprimée en milliers de composants, le coût total en milliers d'euros est défini par $C(x)=0{,}2x^2+24x+20$, où $x\in[0\,;30]$.

La recette est alors égale alors à $R(x)=30x$.

Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût total.
Déterminer le bénéfice maximal et le nombre de composants correspondants à produire.

corrigé en vidéo