VARIABLES ALÉATOIRES

Plan de travail	*Première Spécialité maths*

NOM : ……………………………………… PRÉNOM : …………………………………...

Parcours 1	**1** → **2** → **3** → **4** → **5** → **6** → **7** → **8** → **9** → **13** → **15** → **16** → **18** ↓ **24** ← **22** ← **20** ← **19**
Parcours 2	**1** → **3** → **4** → **5** → **6** → **8** → **10** → **12** → **13** → **15** → **16** → **17** → **19** ↓ **24** ← **23** ← **22** ← **21** ← **20**
Parcours 3	**1** → **4** → **6** → **7** → **9** → **10** → **11** → **12** → **14** → **15** → **17** → **19** ↓ **24** ← **23** ← **22** ← **21** ← **20**

Exercice 1

On lance trois fois successivement un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On additionne les numéros de chacun des résultats obtenus.
Soit X la variable aléatoire associant cette somme à une expérience de trois lancers du dé. Quelle(s) valeur(s) peut prendre X ?

Exercice 2

Dans un restaurant, le consommateur a le choix entre : trois entrées à 2, 3 et 4 €, trois plats principaux à 5, 6 et 7 €, et deux desserts à 3 € chacun.

Un consommateur choisit au hasard une entrée, un plat et un dessert.
On note X la variable aléatoire donnant le prix de son repas. Quelles sont les valeurs prises par X ?

Exercice 3

Une urne contient trois boules jaunes et cinq boules rouges. On tire au hasard et avec remise deux boules. On gagne 3 € par boule jaune tirée et on perd 1 € par boule rouge tirée.
X est la variable aléatoire associant le gain à un tirage. Quelle(s) valeur(s) peut prendre X ?

Exercice 4

On lance 15 fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On noye Y la variable aléatoire donnant le nombre de « 6 » obtenu sur les 15 lancers.
Utiliser une notation pour écrire les probabilités des événements suivants :

a) le dé est tombé cinq fois sur « 6 ».
b) le dé est tombé au moins une fois sur « 6 ».
c) le dé est tombé au plus trois fois sur « 6 ».
d) le dé est tombé plus de dix fois sur « 6 ».

Exercice 5

Une usine fabrique des pièces métalliques pour l'industrie automobile. Elles sont livrées en général par lot de 100 pièces.
On considère la variable aléatoire Y associant le nombre de pièces défectueuses à un lot de 100 pièces.
1) Décrire par une phrase :
 a) l'évènement $\{Y = 9\}$;
 b) l'événement $\{Y < 5\}$.
2) Que signifient $p(Y > 2)$ et $p(Y = 0)$?

C. Lainé

Exercice 6
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau :

x_i	0	2	3	5	7
$p(X = x_i)$	0,1	0,15	0,16	0,45	0,14

Déterminer les probabilités suivantes :
a) $p(X = 5)$; b) $p(X \leq 5)$; c) $p(X > 5)$; d) $p(X \geq 2)$; e) $p(X = 0)$; f) $p(0 < X < 5)$.

Exercice 7
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	a	0,08

1) Déterminer la valeur de a.
2) a) Calculer $p(X \leq 0)$.
b) Calculer $p(X > 7)$.

Exercice 8
Une entreprise fabrique des fioles en verre de contenance théorique 250 mL. Un technicien du contrôle de qualité effectue une analyse d'un échantillon de 200 fioles. Voici les relevés des contenances de ces fioles.

Contenance (en mL)	248	249	250	251	252
Effectifs	3	17	174	4	2

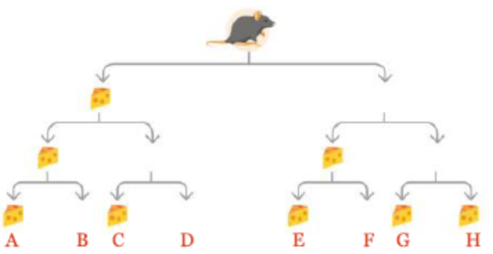
Le technicien prend au hasard une fiole dans cet échantillon. On note X la variable aléatoire donnant la contenance d'une fiole choisie dans l'échantillon.
1) Déterminer $p(X = 252)$.
2) Déterminer la probabilité que la fiole choisie ait une contenance inférieure ou égale à 250 mL.

Exercice 9
On lance un dé équilibré comportant 6 faces. Si la face indique un nombre impair, on perd 3 €, sinon on gagne la valeur en euros du numéro de la face.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu pour modéliser cette situation.

Exercice 10
Mathieu propose le jeu suivant avec une pièce truquée (on estime que la pièce a 38 % de chance de tomber sur Pile). On mise 20 €, puis on lance la pièce deux fois successivement.
On gagne 25 € par Pile obtenu sur les deux lancers.
1) Calculer la probabilité de gagner 30 € à ce jeu en tenant compte de la mise.
2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain à ce jeu (en tenant compte de la mise).

Exercice 11
On lance deux dés équilibrés à 4 faces numérotées de 1 à 4.
On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur du plus grand numéro obtenu sur les deux dés.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 12
On étudie le comportement d'une souris dans le labyrinthe ci-dessous.



À chaque intersection, la souris choisit au hasard et de manière équiprobable une direction. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fromages que la souris a mangés en traversant le labyrinthe.
Déterminer la loi de probabilité de X

C. Lainé

Exercice 13

On considère une urne comportant des boules de couleur verte, jaune ou bleue et sur lesquelles sont inscrites des motifs (croix ou triangle). Il y a 80 boules dans l'urne dont 10 sont vertes avec des croix. La composition globale de l'urne est donnée par le tableau suivant.

	Verte	Jaune	Bleue	Total
Croix	10	30	12	52
Triangles	10	10	8	28
Total	20	40	20	80

On mise 100 € puis on tire au hasard une boule dans l'urne.
On gagne 200 € si c'est une boule verte avec des croix, 150 € si c'est une boule verte avec des triangles, 120 € si c'est une boule bleue avec des croix, et on ne gagne rien dans tous les autres cas.
Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X modélisant la situation.

Exercice 14

Une urne contient n (n entier supérieur ou égal à 10) boules indiscernables au toucher dont cinq sont rouges, deux sont vertes et les autres sont jaunes.
On tire au hasard une boule dans l'urne. Si celle-ci est verte, on gagne 3 €, si elle est jaune on gagne 5 €, sinon on perd 2 €.
X est la variable aléatoire associant le gain algébrique au jeu.

1) Déterminer la loi de probabilité de X (les probabilités seront écrites en fonction de n).

2) Comment faut-il choisir n pour que la probabilité de gagner de l'argent à ce jeu soit supérieure ou égale à 0,6 ?

Exercice 15

On considère un jeu de hasard. La variable aléatoire X donnant le gain (mise comprise) a une loi de probabilité résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-5	-2	0	50
$p(X=x_i)$	0,4	0,3	0,28	0,02

1) En utilisant la définition du cours, calculer $E(X)$.
2) Interpréter ce résultat.
3) Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 16

On donne dans le tableau ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	a	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	p

1) Déterminer la valeur de p.
2) Quelle valeur faut-il donner à a pour que $E(X)=2$?

Exercice 17

Une urne contient 4 tickets numérotés 0 ; 1 ; 10 et 20. Un joueur mise 4 € puis tire au hasard un ticket qui lui indique le montant qu'il gagne.
Quel gain moyen peut-il espérer s'il joue un grand nombre de fois à ce jeu ?

Exercice 18

Un jeu consiste à lancer deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Après le lancer, on fait la somme des numéros des faces. La mise de départ est m euros (m étant un nombre réel positif). Puis :

• on gagne 10 € si on obtient un résultat supérieur ou égal à 6 ;
• on gagne 20 € si on obtient un résultat inférieur à 4 ;
• on ne gagne rien sinon.

1) Pour cette question, on prend $m = 5$.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.
  a) Déterminer la loi de probabilité de X.
  b) Déterminer $E(X)$.
  c) Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur ?

2) Pour quelle valeur de m le jeu est-il équitable ?

Exercice 19

X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs −3 ; 4 ; 10 et 30. Son espérance est égale à 5.
On considère les variables Y et Z telles que $Y = 3X$ et $Z = X + 10$.

1) Déterminer les valeurs que peuvent prendre Y et Z.

2) Déterminer $E(Y)$ et $E(Z)$.

Exercice 20

Pour chacune des variables aléatoires suivantes dont on donne la loi de probabilité à l'aide d'un tableau, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type. On détaillera les calculs, mais on pourra vérifier les résultats à la calculatrice. Si besoin, on arrondira les résultats à 0,01 près.

x_i	-4	0	9	25
$p(X = x_i)$	0,50	0,20	0,20	0,10

y_i	-25	-3	5	100
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0,3	0,2

Exercice 21

Une roue est partagée en 10 secteurs angulaires égaux dont 5 sont colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune.
On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire. Si celui-ci est vert, on gagne 5 €, s'il est jaune on gagne 20 € et s'il est rouge on perd 4 €.
X est la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) de ce jeu.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ à l'aide des formules du cours.
3) Interpréter la valeur de $E(X)$.
4) Vérifier les résultats de la question 2) en utilisant la calculatrice.

Exercice 22

Une société d'assurance fait le bilan de certains sinistres qu'elle a répartis en trois catégories : A, B et C.
Pour les sinistres de catégorie A, elle rembourse 100 €, pour ceux de la catégorie B, elle rembourse 500 € et pour ceux de la catégorie C, elle rembourse 1 500 €.
Une étude statistique sur plusieurs années a permis d'établir la probabilité de chaque sinistre : $p(\mathrm{A}) = 0,5$, $p(\mathrm{B}) = 0,35$ et $p(\mathrm{C}) = 0,15$.
Les assurés paient tous la même cotisation annuelle.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque catégorie de sinistre, associe la différence entre la cotisation et le remboursement.
Quel doit être le montant de la cotisation pour avoir $E(X) = 0$?

L'actuaire est chargé de concevoir et/ou de modifier les contrats d'assurance, ou de mesurer les risques encourus par sa société, l'actuaire se livre à de savants calculs avec un objectif triple : maîtriser l'aléatoire, minimiser les pertes financières et dégager des bénéfices.

Exercice 23

Une entreprise fabrique des capteurs électroniques. À la fin de la fabrication, trois cas peuvent se présenter : le capteur n'a pas de défaut, le capteur a un défaut de fonctionnement ou le capteur a un défaut de taille.
Une étude de qualité a permis d'obtenir les résultats suivants :

	Pas de défaut	Défaut de fonctionnement	Défaut de taille
Nombre de capteurs	190	7	3

• On tire au hasard un capteur dans la production et on regarde s'il a un défaut
On suppose que l'analyse de l'échantillon de 200 capteurs fournit une estimation des probabilités de l'état du capteur.
• Il n'y a donc pas de capteurs ayant les deux défauts.

Un capteur n'ayant pas de défaut coûte 10 € à l'entreprise.
Les réparations suite à un défaut constaté font augmenter le coût de production de 4 € pour un capteur ayant un défaut de fonctionnement et de 6 € pour un capteur ayant un défaut de taille. X est la variable aléatoire donnant le coût total d'un capteur tiré au hasard.

1) Donner la loi de probabilité de X.
2) Si on fabrique un grand nombre de capteur, quel est le coût moyen d'un capteur ?
3) L'entreprise souhaite fabriquer un million de capteurs. Donner une estimation du coût de fabrication.

Exercice 24

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt avec le test, on peut le guérir à moindre coût.
Si le test est négatif bien que l'animal soit malade, le traitement est plus long et cher (en plus du risque potentiel de contagion).
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. De plus :

• Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
• Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

1) Faire un arbre pondéré résumant la situation.
2) Calculer la probabilité qu'un animal soit porteur de la maladie et que le test soit positif.
3) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 10 € et le coût du traitement long d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit.
Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

Bilan

Numéro de mon parcours : ……

J'ai fait tous les exercices de mon parcours : ☐ OUI ☐ NON

Numéros des exercices plus difficiles pour moi (et que je dois revoir) : ……………………

Compétences		M	NM
C09-1	Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $P(X = a)$, $P(X \leqslant a)$		
C09-2	Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire		
C09-3	Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire		
C09-4	Calculer une espérance, une variance, un écart type		
C09-5	Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème		
C09-6	Écrire un programme en Python pour simuler un lancer ou une marche aléatoire		
C09-7	Écrire en Python les fonctions espérance, variance, écart type		

CORRECTIONS

Exercice 1

X prend toutes les valeurs entières de 3 à 12

Exercice 2

X prend toutes les valeurs entières de 7 à 14

Exercice 3

X peut prendre les valeurs -2 (quand on tire deux boules rouges) ; 2 (une boule jaune et une boule rouge) et 6 (deux boules jaunes).

Exercice 4

a) $p(Y = 6)$; b) $p(Y \geqslant 1)$; c) $p(Y \leqslant 3)$;
d) $p(Y > 10)$

Exercice 5

1) a) Il y a 9 pièces défectueuses dans le lot de 100 pièces.

b) Il y a moins de 5 pièces défectueuses dans le lot de 100 pièces (c'est-à-dire un nombre inférieur ou égal à 4).

2) $p(Y > 2)$: la probabilité qu'il y ait plus de deux pièces défectueuses dans le lot de 100 pièces.

$p(Y = 0)$: la probabilité qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse dans le lot de 100 pièces.

Exercice 6

a) 0,45
b) 0,86
c) 0,14
d) 0,90
e) 0,1
f) 0,31

Exercice 7

1) 0,1
2) a) 0,52
b) 0,18

Exercice 8

1) $p(X = 252) = 0{,}01$

2) $p(X \leqslant 250) = 0{,}97$

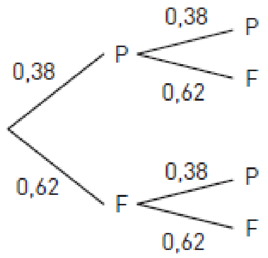
Exercice 9

X peut prendre les valeurs -3, 2, 4 et 6 :

x_i	-3	2	4	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 10

1. On construit un arbre pondéré :



$p(X = 30)$ est la probabilité d'obtenir 2 Pile :
$p(X = 30) = 0{,}38 \times 0{,}38 = 0{,}144\,4$.

2. En calculant les probabilités grâce à l'arbre, on trouve :

x_i	30	5	-20
$p(X = x_i)$	0,1444	0,4712	0,3844

Exercice 11

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Exercice 12

La souris peut manger 1, 2 ou 3 fromages. Il y a 8 chemins possibles.

La loi de probabilité de X est donc donnée dans le tableau suivant :

x_i	3	2	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

Exercice 13

X peut prendre les valeurs 100 ; 50 ; 20 ; – 100
On a :

x_i	100	50	20	-100
$p(X = x_i)$	$\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$	$\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$	$\frac{12}{80} = \frac{3}{20}$	$\frac{48}{80} = \frac{3}{5}$

Exercice 14

x_i	3	5	-2
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{n}$	$\frac{n-7}{n}$	$\frac{5}{n}$

2. Il faut que $p(X \geqslant 0) \geqslant 0{,}6$ soit $\frac{n-5}{n} \geqslant 0{,}6$.
Il faut prendre $n \geqslant 13$.

Exercice 15

1) $E(X) = -1,6$

2) Sur un grand nombre de parties, on perd en moyenne à ce jeu 1,6 euro par partie.

3) Non car $E(X) \neq 0$.

Exercice 16

1) $p = \dfrac{17}{63}$; 2) $a = \dfrac{111}{28}$

Exercice 17

x_i	-4	-3	6	16
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{1}{4} \times (-4) + \frac{1}{4} \times (-3) + \frac{1}{4} \times 6 + \frac{1}{4} \times 16 = 3,75$,

c'est ce que l'on peut espérer gagner en moyenne sur un grand nombre de parties.

Exercice 18

1. a) On obtient :

x_i	-5	5	15
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$

b) $E(X) = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$

c) À l'avantage du joueur.

2.

x_i	$-m$	$10 - m$	$20 - m$
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$

$E(X) = 0 \Leftrightarrow m = 7,5$

Exercice 19

1) Y peut prendre les valeurs : -9 ; 12 ; 30 ; 90.

Z peut prendre les valeurs : 7 ; 14 ; 20 ; 40.

2) $E(Y) = E(3X) = 3E(X) = 15$

$E(Z) = E(X + 10) = E(X) + 10 = 15$

Exercice 20

$E(X) = 2,3$, $V(X) = 81,41$ et $\sigma(X) \approx 9,02$

$E(Y) \approx 12,67$; $V(Y) \approx 2056,89$ et et $\sigma(Y) \approx 45,35$

Exercice 21

1. On obtient :

x_i	5	20	-4
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

2. $E(X) = 3,5$

$V(X) = 83,25$

$\sigma(X) \approx 9,12$

3. Sur un grand nombre de parties, on peut espérer gagner en moyenne 3,50 euros par partie.

Exercice 22

Notons c le montant de la cotisation. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	$c - 100$	$c - 500$	$c - 1500$
$P(X = x_i)$	0,5	0,35	0,15

Pour avoir une espérance nulle, le montant de la cotisation doit donc être de 450 €.

Exercice 23

1. $p(X = 10) = \frac{19}{20}$, $p(X = 14) = \frac{7}{200}$

et $p(X = 16) = \frac{3}{200}$

2. On calcule $E(X) = 10,23$ euros.

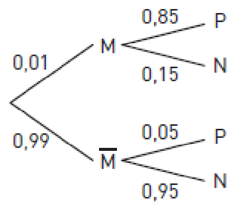
3. 10,23 millions.

Exercice 24

M : « L'animal est malade. »

P : «Le test est positif. »

N : « Le test est négatif. »



2. $p(M \cap P) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$.

3. X étant la variable aléatoire donnant le coût à engager pour un animal, on a :

x_i	0	10	1000
$p(X = x_i)$	0,9405	0,058	0,0015

Alors $E(X) = 2,08$.