TANGENTES COMMUNES À DEUX COURBES	
Première S	***Séance informatique***

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dans un repère orthonormal $\left(O~;\vec{i},~\vec{j}\right)$.

L'objectif du problème est de trouver, si elles existent, les tangentes communes à ces deux courbes.

1) a) Afin de pouvoir conjecturer la solution, réaliser une figure à l'aide du logiciel GeoGebra.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite

b) Émettre la conjecture.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

2) *Justification mathématique de la conjecture*.

a) Écrire les équations réduites de (T_1) et de (T_2).

b) Montrer alors que (T_1) et (T_2) sont confondues si, et seulement si, $2a = -\dfrac{1}{b^2}$ et $-a^2 = \dfrac{2}{b}$.

c) En déduire les valeurs de a et b.

d) Répondre au problème posé.

1) a) Voir figure.

b) On peut conjecturer que **$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont une tangente commune pour $a = -2$ et $b = -0,5$**.

2) *Justification mathématique de la conjecture.*

a) (T_1) a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Or $f'(x) = 2x$, pour tout réel x.
Alors $f'(a) = 2a$. D'où : $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$.
Donc **(T_1) a pour équation $y = 2ax - a^2$**.

(T_2) a pour équation $y = g'(b)(x-b) + g(b)$.
Or $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, pour tout réel x différent de 0. Alors $g'(b) = -\dfrac{1}{b^2}$.
D'où : $y = -\dfrac{1}{b^2}(x-b) + \dfrac{1}{b} = -\dfrac{1}{b^2}x + \dfrac{2}{b}$.
Donc **(T_2) a pour équation $y = -\dfrac{1}{b^2}x + \dfrac{2}{b}$**.

b) D'après la question précédente, **(T_1) et (T_2) sont confondues** si, et seulement si, ces droites ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine, c'est-à-dire **si, et seulement si, $2a = -\dfrac{1}{b^2}$** et **$-a^2 = \dfrac{2}{b}$**.

c) $\begin{cases} 2a = -\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2 = \dfrac{2}{b} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} \\ -\left(-\dfrac{1}{2b^2}\right)^2 = \dfrac{2}{b} \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{4b^4} = \dfrac{2}{b} \end{cases}$.

Or $-\dfrac{1}{4b^4} = \dfrac{2}{b} \iff 8b^4 = -b \iff b\left(8b^3 + 1\right) = 0 \iff 8b^3 + 1 = 0$ car $b \neq 0$; d'où :

$-\dfrac{1}{4b^4} = \dfrac{2}{b} \iff b^3 = -\dfrac{1}{8} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$.

Donc, $\begin{cases} 2a = -\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2 = \dfrac{2}{b} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} = -\dfrac{1}{2 \times \dfrac{1}{4}} = -2 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Par conséquent, **(T_1) et (T_2) sont confondues si, et seulement si, $a = -2$ et $b = -0,5$**.

d) D'après la question précédente, on en déduit que **$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont une tangente commune**.