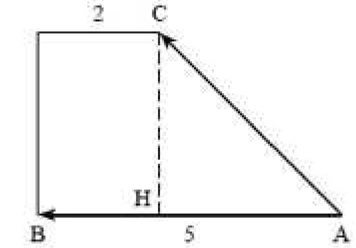
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Produit scalaire	**Le mardi 16 mai 2017**

Exercice 1

1)

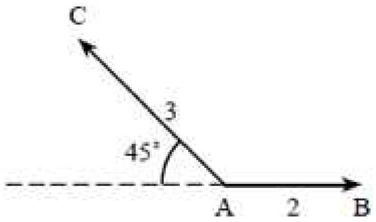


$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Comme $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et même sens, alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 5 \times 3 = 15$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 15}$.

2)



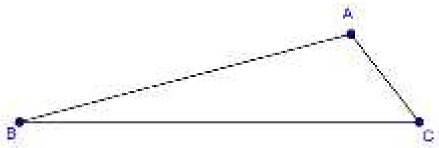
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

D'où : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = -3\sqrt{2}}$.

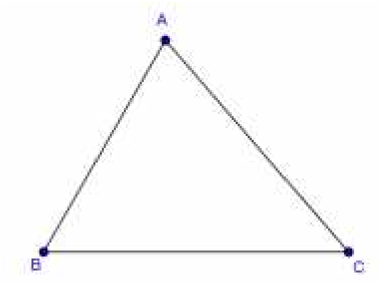
3)



$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(64 + 84 - 100)$$

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 24}$.

4)



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}}$

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-4\ ;\ -4\sqrt{3}\right)$ et $\left(6\ ;\ -4\sqrt{3}\right)$.

D'où $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = (-4) \times 6 + \left(-4\sqrt{3}\right) \times \left(-4\sqrt{3}\right)$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 24}$.

Exercice 2

1) $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \bullet \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}(100 - 25 - 64) = 5{,}5$.

D'où : $\boldsymbol{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}} = 25 + 5{,}5 = \mathbf{30{,}5}$.

2) On sait que $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$.

D'où $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 50\cos\left(\widehat{ABC}\right)$.

En utilisant la question précédente, on obtient : $50\cos\left(\widehat{ABC}\right)=30{,}5$, et, par suite

$\boldsymbol{\cos\left(\widehat{ABC}\right)}=\dfrac{30{,}5}{50}$ Z $\mathbf{0{,}61}$.

Par conséquent, **l'angle $\widehat{ABC}$ mesure environ 52,4° à 0,1 degré près**

3) Dans le triangle ABH rectangle en H, on a : $\sin\left(\widehat{ABH}\right)=\dfrac{AH}{AB}$.

D'où $\boldsymbol{AH}=5\times\sin(52{,}4°)$ ù $\mathbf{3{,}96}$.

4) $\boldsymbol{aire(ABC)}=\dfrac{BC\times AH}{2}=\dfrac{10\times 3{,}96}{2}$ Z **19,8 u.a.**

Exercice 3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$.
Or $\vec{u}\bullet\vec{v}=(-m+2)\times 4m+(-3)\times 1=-4m^2+8m-3$.
D'où $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$ équivaut à $-4m^2+8m-3=0$.
$\Delta=8^2-4\times(-4)\times(-3)=16$; comme $\Delta>0$, cette équation admet deux solutions :

$m_1=\dfrac{-8-\sqrt{16}}{2\times(-4)}=\dfrac{-12}{-8}=\dfrac{3}{2}=1{,}5$ et $m_2=\dfrac{-8+\sqrt{16}}{2\times(-4)}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$.

Par conséquent, **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux lorsque m prend les valeurs 0,5 ou 1,5**.

Exercice 4

1) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$.

Comme ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Par suite, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}}=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(6^2-4^2-3^2\right)$ Z $\boldsymbol{\dfrac{11}{2}}$.

2) $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\,\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{AD}=BA^2+AD^2-2\,\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}$.

Par suite, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{BA}\ \mathrm{H}\ \overrightarrow{AD}\right)^2}=16+9-2\times\dfrac{11}{2}$ Z $\mathbf{14}$.

3) D'après la question précédente, et comme $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$, alors $BD^2=14$.
Comme BD est positive, alors $\boldsymbol{BD}$ Z $\boldsymbol{\sqrt{14}}$.

Exercice 5

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)$ d'après la relation de Chasles.

Comme I est le milieu du segment $[BC]$, alors $\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}$.

D'où $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{IB}^2$ d'après la propriété de linéarité du produit scalaire. Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ õ $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$ Z $\boldsymbol{AI^2}$ J $\boldsymbol{IB^2}$.