CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

Loi binomiale et applications de la dérivation	***Le jeudi 23 mars 2017***

Exercice 1

1) Prélever un stylo ayant un défaut est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}1$.
Cette expérience est répétée 8 fois de façon indépendante et identique.
Donc **X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0{,}1)$**.

2) a) Pour tout k entier naturel compris entre 0 et 8, $p(X=k) = \binom{8}{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{8-k}$.

Donc $p(X=2) = \binom{8}{2}(0{,}1)^2(0{,}9)^{8-2} = 28(0{,}1)^2(0{,}9)^6 \approx 0{,}149$.

Par conséquent, **la probabilité qu'il y a exactement deux stylos avec un défaut, est égale à environ 0,149**.

b) On cherche $p(X \geq 1)$.

Or $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \binom{8}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^8 = 1-(0{,}9)^8 \approx 0{,}570$.

Donc **la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut, est égale à environ 0,57**.

3) $E(X) = np = 8 \times 0{,}1 = 0{,}8$. **L'entreprise peut espérer obtenir en moyenne 1 stylo présentant un défaut**.

Exercice 2

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, alors $\binom{10}{6} = \binom{10}{10-6} = \binom{10}{4}$ Z **210**.

Comme $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, alors $\binom{11}{5} = \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 210 + 252$ Z **462**.

Exercice 3

1) $\boldsymbol{p(X}$ Z $\boldsymbol{8)}$ ù **0,0138**.

2) Comme $E(X) = np$, alors $p = \frac{3}{10}$ Z **0,3**. D'où $\boldsymbol{p(X}$ á $\boldsymbol{3)}$ ù **0,6496**.

$\boldsymbol{p(X}$ ñ $\boldsymbol{7)} = 1 - p(X \leq 7)$ ù **0,0016**.

Calculer $p(X \leq 3)$ et $p(X \geq 7)$.

Exercice 4

1) L'aire du poulailler est égale à $x \times y$. D'où : $x \times y = 392$.

Par conséquent, $\boldsymbol{y}$ Z $\boldsymbol{\frac{392}{x}}$.

2) l$(x) = 2x + y = 2x + \frac{392}{x}$ Z $\boldsymbol{\frac{2x^2 \text{ H } 392}{x}}$.

3) La fonction l est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle.

On a : $\ell = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + 392$ et $v(x) = x$.

D'où $\ell' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2 \times 2x + 0 = 4x$ et $v'(x) = 1$.

Par suite, **pour tout réel x strictement positif,** $\ell'(x) = \frac{4x \times x - (2x^2 + 392) \times 1}{x^2} = \boldsymbol{\frac{2x^2 - 392}{x^2}}$.

Comme $x^2 > 0$; alors le signe de $\ell'(x)$ dépend du signe de $2x^2 - 392$, c'est-à-dire de $x^2 - 196 = (x - 14)(x + 14)$. De plus, $x + 14 > 0$ car $x > 0$.

On en déduit que :

x	0		14		$+\infty$
$\ell'(x)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent, **la fonction ℓ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ 14]$ et strictement croissante sur $[14\ ;+\infty[$**.

4) Comme la fonction ℓ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ 14]$ et strictement croissante sur $[14\ ;+\infty[$, alors ℓ **admet un minimum en $x = 14$ m**. Dans ce cas, $\boldsymbol{y = \frac{392}{14} = 28}$ **m**.

Or $\ell(14) = 2 \times 14 + 28 = 56$. Donc **la longueur minimale de la clôture est égale à 56 m.**