CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Probabilités et fonctions dérivées	Le jeudi 16 février 2017

Exercice 1

1) **X peut prendre les valeurs : - 2 ; 1 et 3**.

$p(X=-2)=p(\text{la roue s'arrête sur le vert})=\frac{5}{8}$

$p(X=1)=p(\text{la roue s'arrête sur le bleu})=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$p(X=3)=p(\text{la roue s'arrête sur le rouge})=\frac{1}{8}$.

La loi de probabilité est résumée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) a) $E(X)=\sum_{i=1}^{3} p(X=x_i)\times x_i=\frac{5}{8}\times(-2)+\frac{2}{8}\times 1+\frac{1}{8}\times 3=-\frac{5}{8}=-0{,}625$.

b) **Si le joueur joue un très grand nombre de fois, il perdra en moyenne 0,625 €**.

c) D'après la question précédente, **c'est l'organisateur qui est le plus avantagé**.

3) **Pour que l'espérance de gain soit égale à 0, il faudrait que le joueur puisse gagner 10 € si la rue s'arrête sur le rouge**.
En effet, dans ce cas, X prendrait les valeurs – 2, 1 et 8.

Par suite, $E(X)=\frac{5}{8}\times(-2)+\frac{2}{8}\times 1+\frac{1}{8}\times 8=0$.

Exercice 2

1) $p_0=\frac{30}{100}=0{,}3$; $p_1=\frac{25}{100}=0{,}25$; $p_2=\frac{20}{100}=0{,}2$; $p_3=\frac{15}{100}=0{,}15$ et $p_4=\frac{10}{100}=0{,}1$.

2) a) D'après l'algorithme, si n est pair, alors G prend la valeur $2n$, et si n est impair, G prend la valeur $-n$.
Donc **G pend les valeurs : 0 ; -1 ; 4 ; -3 et 8**.

b) On en déduit que :

g_i	-3	-1	0	4	8
$p(G=g_i)$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$

$E(G)=\sum_{i=1}^{5} p(G=g_i)\times g_i=0{,}15\times(-3)+0{,}25\times(-1)+0{,}30\times 0+0{,}20\times 4+0{,}10\times 8=0{,}9$.

c) D'après la question précédente :

$V(G)=\sum_{i=1}^{n} p_i g_i^2 - E(G)^2 = 0{,}15\times(-3)^2+0{,}25\times(-1)^2+0{,}30\times 0^2+0{,}20\times 4^2+0{,}10\times 8^2-(0{,}9)^2$

Donc $\boldsymbol{V(G)=10{,}39}$.

Par suite, $\sigma_G=\sqrt{V(G)}=\sqrt{\mathbf{10{,}39}}\approx \mathbf{3{,}22}$.

Exercice 3

1) $f(x)=\sqrt{3}x^2+2x+3$.

On a : $f=u+v$ avec $u(x)=\sqrt{3}x^2$ et $v(x)=2x+3$.

D'où : $f'=u'+v'$ avec $u'(x)=\sqrt{3}\times(2x)=2\sqrt{3}x$ et $v'(x)=2$.

Par conséquent, $\boldsymbol{f'(x)=2\sqrt{3}x+2}$.

2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

On a : $g=\dfrac{1}{v}$ avec $v(x)=x^2-1$.

D'où : $g'=\dfrac{-v'}{v^2}$ avec $v'(x)=2x-1$.

Par conséquent, $\boldsymbol{g'(x)=-\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}}$.

3) $h(x)=\dfrac{x^3-1}{3x^2+1}$.

On a : $h=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x^3-1$ et $v(x)=3x^2+1$.

D'où : $h'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=3x^{3-1}-0=3x^2$ et $v'(x)=3\times(2x)+0=6x$.

Par conséquent, $\boldsymbol{h'(x)}=\dfrac{\left(3x^2\right)\times\left(3x^2+1\right)-\left(x^3-1\right)\times(6x)}{\left(3x^2+1\right)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2+6x}{\left(3x^2+1\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{3x\left(x^3+x+2\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}}$

4) $j(x)=(x-5)\sqrt{x}$.

On a : $j=u\times v$ avec $u(x)=x-5$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

D'où : $j'=u'\times v+u\times v'$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{j'(x)}=1\times\sqrt{x}+(x-5)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\boldsymbol{\dfrac{3x-5}{2\sqrt{x}}}$.