PRODUIT SCALAIRE	
Cours	***Première S***

Hermann Grassmann
(1809 – 1877)

Au XIX[e] siècle, le mathématicien allemand Grassmann étudiant le phénomène des marées, développe le calcul vectoriel et définit le produit scalaire qu'il appelle **produit linéaire** : « Il s'agit du produit algébrique d'un vecteur multiplié par la projection du second vecteur sur le premier ». C'est William Hamilton (1805 – 1865), mathématicien et astronome irlandais, qui le nomme **produit scalaire** en 1853 car le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un réel (scalaire vient du latin *scala* qui signifie mesure).

1. Produit scalaire de deux vecteurs

1) Norme d'un vecteur

Définition 1 : Soient un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Ce n'est pas une multiplication …

2) Définition

Définition 2 :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$**,** noté $\vec{u}\bullet\vec{v}$, est le nombre réel défini par :
$\vec{u}\bullet\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

2) Autres expressions du produit scalaire

Définitions 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel défini aussi par :

- $\vec{u}\bullet\vec{v} = xx' + yy'$ où $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.

- Soit A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

$$\vec{u}\bullet\vec{v} = \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
$$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$$

-

Le produit scalaire de deux vecteurs est ***un réel***

C. Lainé

<u>Démonstrations de l'égalité de ces quatre expressions</u> :

• **Égalité entre les deux premières expressions** :

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x' \,;\, y+y')$, donc

$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2 = x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2$; on en déduit que :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2\right)-\left(x^2+y^2\right)-\left(x'^2+y'^2\right)\right]$$

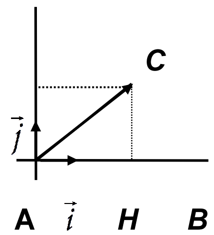
c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)=xx'+yy'$.

• **Égalité entre les deuxième et troisième expressions** :

Choisissons un repère orthonormal $(A\,;\vec{i},\ \vec{j})$ el que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires et de même sens.

On note $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ les coordonnées respectivement de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans ce repère.

On a alors : $x = AB$, $y = 0$, $x' = AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et $y' = AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.



Ainsi $xx'+yy' = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)+0\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right) = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

3) Applications

<u>a) Application 1</u>

Soit A (2 ; 3), B (-1 ; 4) et C (-2 ; 1) trois points du plan muni d'un repère orthonormal.
Calculer $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC} = (-1-2)\times(-2+1)+(4-3)\times(1-4) = 3+(-3) = 0$.

<u>b) Application 2</u>

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 3$ (dans l'unité de longueur choisie).
Déterminer $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CE}$.

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 3\times 3\times\cos\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$

4) Remarques

• **Signe du produit scalaire :**

On déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ suivant la nature de l'angle $\widehat{BAC}$.
En effet, les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont positives. On en déduit donc que $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ est du signe de $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

- si $0\le\widehat{BAC}<\frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\widehat{BAC}\right)>0$ et $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}>0$.

- si $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0$ et $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$.

- si $\frac{\pi}{2} < \widehat{BAC} \leq \pi$, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) < 0$ et $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} < 0$.

• **Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leurs normes :**

Le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et -1.
On a donc : $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \bullet \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

• **Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :**

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right) = 0$ et $\cos\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right) = 1$.

On en déduit que : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire**, alors $\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right) = \pi$ et $\cos\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right) = -1$.

On en déduit que : $\vec{u} \bullet \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

2. Propriétés

1) Opérations vectorielles

Propriétés 1 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan, et k un réel, on a :

• **Symétrie** : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$.
• **Linéarité** : $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$, $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$, $\left(k\vec{u}\right) \bullet \vec{v} = k\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$ et $\vec{u} \bullet \left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$.

Démonstration : On se place dans un repère orthonormal (seulement utile pour la démonstration) et on note $(x\ ;\ y)$, $(x'\ ;\ y')$ et $(x''\ ;\ y'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Montrons l'égalité $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$; *les autres égalités se montrent de la même façon.*
$\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées $(x' + x''\ ;\ y' + y'')$.
Donc $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = (xx' + yy') + (xx'' + yy'') = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$.

Remarque : D'après la définition,
$$\vec{u} \bullet \left(-\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \left(-\vec{v}\right)\right\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|-\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = -\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$
Or $\vec{u} \bullet \left(-\vec{v}\right) = -\vec{u} \bullet \vec{v}$; d'où $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$. On en déduit alors :

Propriété 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$, est le nombre réel défini par :
$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

Conséquence : Soit A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Alors $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

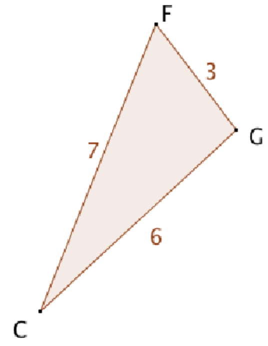
D'après la propriété 2, on en déduit que

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

Propriété 3 : Soient *A*, *B* et *C* trois points du plan. $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$.

Exemple : *Calculer* $\overrightarrow{CG}\bullet\overrightarrow{CF}$.

$$\overrightarrow{CG}\bullet\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-GF^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)=38$$



2) Carré scalaire et norme

Définition 3 : Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\bullet\vec{u}$ est appelé ***carré scalaire*** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$.

On a : $\vec{u}^2=\vec{u}\bullet\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{u}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|^2$.

Ce qui donne, pour deux points *A* et *B* du plan : $\overrightarrow{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=AB^2$.

Remarques : • $\vec{u}$ est unitaire si, et seulement si, $\vec{u}^2=1$.

• Après quelques calculs, on retrouve ***des produits scalaires remarquables*** :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\,\vec{u}\bullet\vec{v}$; $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\,\vec{u}\bullet\vec{v}$; $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

Attention ! : Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais il ne faut pas généraliser.
En effet, on peut avoir $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$ avec $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.
D'autre part, $\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{u}\bullet\vec{w}$ n'implique pas $\vec{v}=\vec{w}$.

3. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Définition 4 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad\left(k\in\mathbf{Z}\right)$

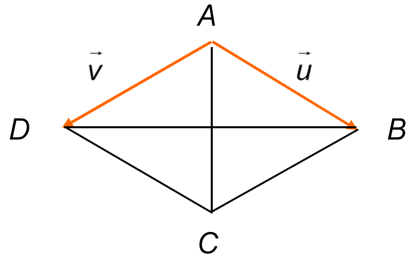
Propriété 4 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$.

Démonstration : Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, le résultat est évident.
Supposons $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$. On a : $\vec{u}\bullet\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$ $\vec{u}\bullet\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.

On en déduit que : $\vec{u}\bullet\vec{v}=0\iff\cos\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)=0\iff\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad\left(k\in\mathbf{Z}\right)\iff\vec{u}\perp\vec{v}$.

2) Application

Soit ABCD un parallélogramme.
Montrer que ABCD est un losange si, et seulement si, ses diagonales sont perpendiculaires.



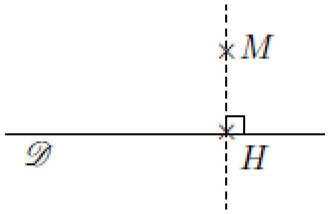
Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Alors : $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{DB} = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = AB^2 - AD^2$.

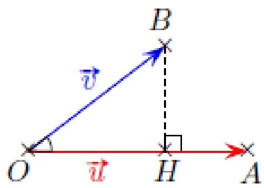
D'où $ABCD$ est un losange si, et seulement si, $AB = AD$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{DB} = 0$; ce qui équivaut à $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$.

3) Projection orthogonale

Définition 5 : Soient $\mathscr{D}$ une droite et M un point du plan.
On appelle **projeté orthogonal** du point M sur la droite $\mathscr{D}$ l'unique point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ et de la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par le point M.



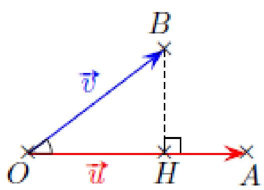
Propriété 5 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
Alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OH}$.



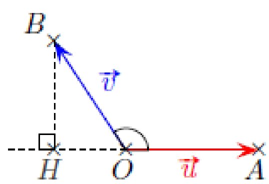
Démonstration : $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \bullet (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{HB}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux ; d'où $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{HB} = 0$.
Par conséquent, $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OH}$.

Remarque :

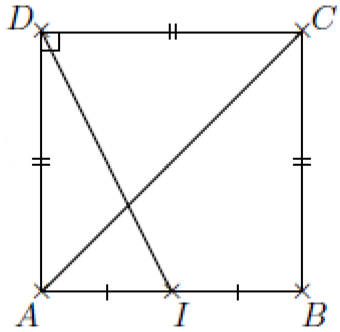


$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = OA \times OH$



$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

<u>Exemple</u> : *Soit ABCD un carré de côté c.*
Soit I le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.



- Comme B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=c^2$.
- Comme A est le projeté orthogonal de D sur la droite (IB), alors $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IA}=-IB\times IA=-\frac{c}{2}\times\frac{c}{2}=-\frac{c^2}{4}$.
- Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.