FONCTION DÉRIVÉE	
Cours	***Première S***

1. Fonction dérivée

1) Fonction dérivée

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2$. La fonction f est-elle dérivable pour tout réel a ?

Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h .$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) = \lim\limits_{h\to 0}(2a+h) = 2a$.

Donc, pour tout réel a, la fonction f est dérivable en a, et $f'(a) = 2a$.

On a donc défini sur **R** une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

<u>Définition 1</u> : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction, qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$, s'appelle fonction dérivée de f. On la note f'.

<u>Remarque</u> : On appelle *ensemble de dérivabilité* de la fonction f, l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie.

2) Dérivée des fonctions usuelles

On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathcal{D}_{f'}$ l'ensemble de définition de la fonction dérivée de f'.

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Fonction f'	$\mathcal{D}_{f'}$
$f(x) = k$ k étant un réel	**R**	$f'(x) = 0$	**R**
$f(x) = mx + p$ m et p étant des réels	**R**	$f'(x) = m$	**R**
$f(x) = x^2$	**R**	$f'(x) = 2x$	**R**
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	**R**	$f'(x) = nx^{n-1}$	**R**
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	**R***	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	**R***
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$		$]0\,;+\infty[$

Démonstrations :

a) Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{k-k}{h}=0$.

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(0)=0$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a, et $f'(a)=0$.

b) Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{m(a+h)-ma}{h}=\frac{mh}{h}=m$.

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(m)=m$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a, et $f'(a)=m$.

c) Déjà démontrée dans le 1).

d) On l'admettra.

e) Soit a un réel différent de 0. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{(a+h)a}}{h}=\frac{-h}{h(a+h)a}=-\frac{1}{(a+h)a}.$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{(a+h)a}\right)=-\frac{1}{a^2}$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a non nul, et $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$.

f) Soit a un réel strictement positif. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a strictement positif, et $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

2. Dérivées et opérations

1) Fonction dérivée

Propriétés : Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soiten u et v deux fonctions dérivables sur $\mathscr{D}$, et k un réel, alors :

• les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur $\mathscr{D}$ et :
$(ku)'=ku'$; $(u+v)'=u'+v'$ et $(uv)'=u'v+uv'$.

• si pour tout réel a de $\mathscr{D}$, $v(a)\neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Démonstrations :

a) Soit a un élément de $\mathscr{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}=\frac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}.$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=k\times\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=k\times u'(a)$$

Donc la fonction ku est dérivable en tout réel a de $\mathscr{D}$, et $(ku)'(a)=k\times u'(a)$.

b) Soit a un élément de $\mathscr{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}=\frac{\left(u(a+h)-u(a)\right)-\left(v(a+h)-v(a)\right)}{h}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}-\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)=u'(a)+v'(a)$.

Donc la fonction $u+v$ est dérivable en tout réel a de $\mathscr{D}$, et $(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$.

c) Soit a un élément de $\mathscr{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$. On en déduit alors :

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\times u(a)$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}\right)=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$..

Donc la fonction uv est dérivable en tout réel a de $\mathscr{D}$, et $(uv)'(a)=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$.

d) Soit a un élément de $\mathscr{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h}=\frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h}=\frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a+h)v(a)}=-\frac{1}{v(a+h)v(a)}\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h}\right)=-\dfrac{1}{v(a)\times v(a)}\times v'(a)$.

Donc la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout réel a de $\mathscr{D}$, et $\left(\dfrac{1}{v}\right)(a)=-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$.

e) Soit a un élément de $\mathscr{D}$. Pour h différent de 0, on a : $\dfrac{u}{v}=u\times\dfrac{1}{v}$.

D'où : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=u'\times\dfrac{1}{v}+u\times\left(\dfrac{1}{v}\right)'=u'\times\dfrac{1}{v}+u\times\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$.

Remarques : • $\left(u^2\right)'=(u\times u)'=u'\times u+u\times u'=2u'u$.

• Toute fonction polynôme est dérivable sur **R**.

• Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

3) Exemples

a) Exemple 1

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞[par f(x) = $x\sqrt{x}$. Déterminer la dérivée de la fonction f.

$f = uv$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

$\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } [0\,;+\infty[\\ v \text{ est dérivable sur }]0\,;+\infty[\end{cases}$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Alors $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$,

$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

b) Exemple 2

*Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = x^3 + x^2$.*

$g = u + v$ où $u(x) = x^3$ et $v(x) = x^2$.
u et v sont dérivables sur **R**, donc g est dérivable sur **R**.
Alors $g' = u' + v'$ où $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = 2x$, et pour tout réel x,
$g'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$.

c) Exemple 3

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$h = \dfrac{1}{v}$ où $v(x) = \sqrt{x}$. Comme v est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, alors h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

D'où $h' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $h'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

d) Exemple 4

Soit m la fonction définie sur $I = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$ par $m(x) = \dfrac{3x-2}{4x+1}$.

$m = \dfrac{u}{v}$ où $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = 4x + 1$.
m est dérivable sur I, et pour tout réel x de I,
Alors $m' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 4$, et pour tout réel x de I,
$m'(x) = \dfrac{3(4x+1) - 4(3x-2)}{(4x+1)^2} = \dfrac{12x + 3 - 12x + 8}{(4x+1)^2} = \dfrac{11}{(4x+1)^2}$.

3. Dérivées et sens de variation

1) Sens de variation au signe de la dérivée

Théorème 1 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

2) Application

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^3 + 9$. Étudier les variations de f.

f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur **R**, et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.
On en déduit que, pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$.
Par conséquent, f est strictement croissante sur **R**.

On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$	9	$\nearrow$	

4) Remarques

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, il n'est pas toujours utile de dériver ; n'oubliez pas :

- **la définition**
- **les fonctions associées** : par exemple, $f : x \mapsto \dfrac{1}{-3x+2}$ peut s'écrire $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = -3x + 2$.
- **les sommes de fonctions** : par exemple, $f : x \mapsto x^2 + x - 2$ peut s'écrire $f = u + v$ où $u(x) = x^2$ et $v(x) = x - 2$.

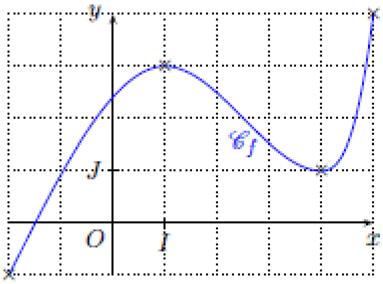
4. Extremum d'une fonction

1) Notion d'extrémum local

Définitions 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I distinct des extrémités.

- On dit que f admet un maximum local en c si $f(c)$ est le maximum de f restreinte à un intervalle **ouvert** contenant c.
- On dit que f admet un minimum local en c si $f(c)$ est le minimum de f restreinte à un intervalle **ouvert** contenant c.

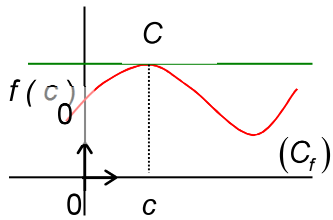
Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 5]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le repère (*O* ; *I* ; *J*) ci-dessous :



4 est le maximum de la fonction f sur $[-2\ ;\ 5]$ et il est atteint pour $x = 5$.
-1 est le minimum de la fonction f sur $[-2\ ;\ 5]$ et il est atteint pour $x = -2$.
3 est un maximum local de la fonction f. En effet, pour tout x de $]0\ ;\ 2[$, $f(x) \leq 3$.
1 est un minimum local de la fonction f. En effet, pour tout x de $]3\ ;\ 5[$, $f(x) \geq 1$.

2) Lien d'un extremum avec la dérivation

Théorème 2 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.



Conséquences graphiques : On a $f'(c) = 0$; on en déduit que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en *C* est nul ; la tangente est horizontale.

Remarques : • Il est important que I soit ouvert.
Par exemple, $f : x \mapsto x^2$ et I = [0 ; 1], $f(1) = 1$ est le maximum de f sur I et pourtant $f'(1) = 2$ …

• Une fonction non dérivable en un réel, peut admettre un extremum en ce réel.

Par exemple, la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 et pourtant elle admet un extremum local en 0.

• La réciproque de ce théorème est fausse . *(Si $f'(c) = 0$, on n'a pas forcément un extremum en c …)*

Par exemple, $f : x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$ et pourtant $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local de f…

3) Existence d'un extremum

Théorème 3 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée f' s'annule en un réel a distinct de I en changeant de signe alors f admet en a un extremum local.

Application : *Soit f la fonction définie sur **R** par f(x) = 5x² - 3x + 4 .*
Cette fonction admet-elle un extremum sur R ?

La fonction f est dérivable sur R en tant que fonction polynôme.

$f = 5u + v$ où $u(x) = x^2$ et $v(x) = -3x + 4$.

Alors $f' = 5u' + v'$ où $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -3$, et pour tout réel x, $f'(x) = 10x - 3$.

Or : $f'(x) = 0$ lorsque $x = \frac{3}{10}$; $f'(x) > 0$ lorsque $x > \frac{3}{10}$ et $f'(x) < 0$ lorsque $x < \frac{3}{10}$.

Comme la dérivée f' s'annule en changeant de signe en $x = \frac{3}{10}$, alors f admet un minimum en $\frac{3}{10}$. Ce minimum est $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$.