ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

Cours	***Première S***

1. Mesure de l'angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls

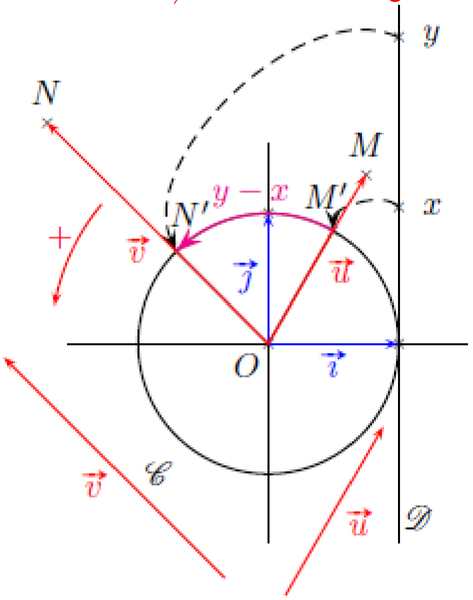
1) Ensemble des mesures

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct.

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.

Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. On appelle *M* et *N* les deux points définis par $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$. On construit les deux points *M'* et *N'*, intersections respectives des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

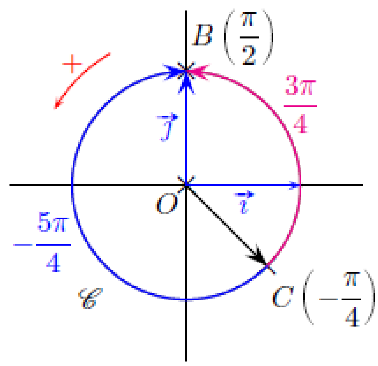
<u>Définition 1</u> : Une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$ est le réel $y-x$ où *M'* est l'image du nombre x et *N'* est l'image du nombre y sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



<u>Exemple</u> : *Déterminer une mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}\right)$.

B est l'image du nombre $\frac{\pi}{2}$ et *C* est l'image du nombre $-\frac{\pi}{4}$, sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}\right)$ est alors $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$.



B est également l'image du nombre $-\frac{3\pi}{2}$ sur $\mathscr{C}$. Une autre mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}\right)$ est donc $-\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{5\pi}{4}$.

On remarque ainsi qu'un angle orienté de vecteurs possède une infinité de mesures qui diffèrent toutes d'un multiple de 2π.
Il en résulte que :

Propriété 1 : Si α est une mesure de $(\vec{u},\ \vec{v})$, alors les autres mesures de l'angle orienté $(\vec{u},\ \vec{v})$ sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
On note $(\vec{u},\ \vec{v}) = \alpha + 2k\pi$ ou $(\vec{u},\ \vec{v}) = \alpha\ [2\pi]$, qu'on lit $(\vec{u},\ \vec{v}) = \alpha$ "modulo 2π".

2) Mesure principale d'un angle orienté

Définition 2 : Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u},\ \vec{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$; on l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u},\ \vec{v})$.

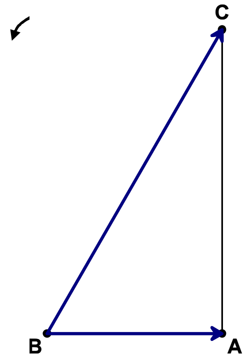
Remarque : La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u},\ \vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Exemple :

La mesure principale de $(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC})$ est $\frac{\pi}{3}$. $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

La mesure principale de $(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB})$ est $-\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.

La mesure principale de $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ est $-\frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.



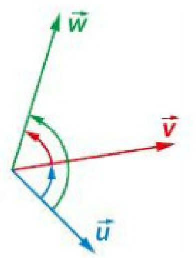
2. Propriétés des angles orientés

1) Angle nul, angle plat

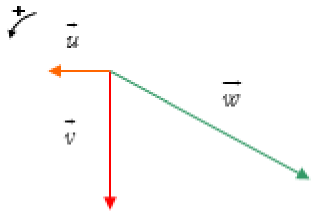
Définition 3 : Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, on appelle $(\vec{u},\ \vec{u})$ l'angle nul et $(\vec{u},\ -\vec{u})$ l'angle plat.
Ainsi, pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, $(\vec{u},\ \vec{u}) = 0\ [2\pi]$ et $(\vec{u},\ -\vec{u}) = \pi\ [2\pi]$.

2) Relation de Chasles

Propriété 2 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté. $(\vec{u},\ \vec{v}) = (\vec{u},\ \vec{w}) + (\vec{w},\ \vec{v})$.



Exemple : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que $(\vec{u},\ \vec{w}) = \dfrac{5\pi}{6}$ et $(\vec{w},\ \vec{v}) = -\dfrac{\pi}{3}$.



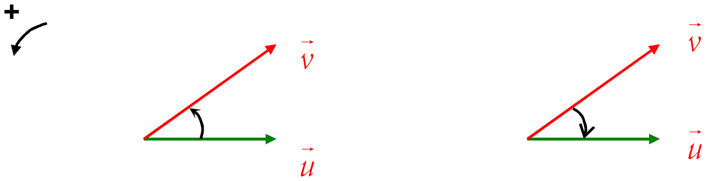
D'après la relation de Chasles, $(\vec{u},\ \vec{v}) = (\vec{u},\ \vec{w}) + (\vec{w},\ \vec{v})$.

On en déduit donc que $(\vec{u},\ \vec{v}) = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3) Conséquences de la relation de Chasles

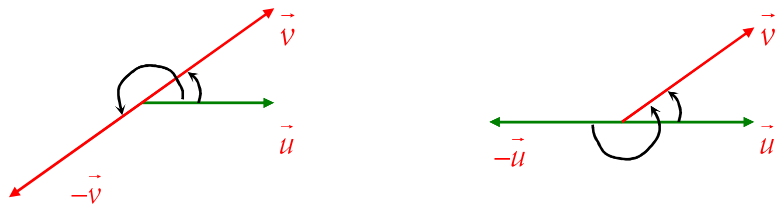
Propriétés 3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

$(\vec{v},\ \vec{u}) = -(\vec{u},\ \vec{v})\ [2\pi]$



$(\vec{u},\ -\vec{v}) = (\vec{u},\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$

$(-\vec{u},\ \vec{v}) = (\vec{u},\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$



$(-\vec{u},\ -\vec{v}) = (\vec{u},\ \vec{v})\ [2\pi]$

Démonstrations :

(1) D'après la relation de Chasles, $(\vec{u},\ \vec{v}) + (\vec{v},\ \vec{u}) = (\vec{u},\ \vec{u})\ [2\pi] = 0\ [2\pi]$; donc : $(\vec{v},\ \vec{u}) = -(\vec{u},\ \vec{v})\ [2\pi]$.

(2) D'après la relation de Chasles, $(\vec{u},\ \vec{v}) + (\vec{v},\ -\vec{v}) = (\vec{u},\ -\vec{v})\ [2\pi]$.

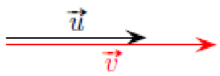
Or $(\vec{v},\ -\vec{v}) = \pi\ [2\pi]$; donc $(\vec{u},\ -\vec{v}) = (\vec{u},\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$.

(3) D'après la relation de Chasles,
$(\vec{u},\ \vec{v}) = (\vec{u},\ -\vec{u}) + (-\vec{u},\ -\vec{v}) + (-\vec{v},\ \vec{v})\ [2\pi] = \pi + (-\vec{u},\ -\vec{v}) + \pi\ [2\pi] = (-\vec{u},\ -\vec{v}) + 2\pi\ [2\pi]$.

Les mesures sont définis modulo 2π , donc $(-\vec{u},\ -\vec{v}) = (\vec{u},\ \vec{v})\ [2\pi]$.

4) Angles orientés et vecteurs colinéaires

Propriété 4 : • Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si, et seulement si, $(\vec{u},\ \vec{v}) = 0\ [2\pi]$.



• Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si, et seulement si, $(\vec{u},\ \vec{v}) = \pi\ [2\pi]$.