SECOND DEGRÉ	
Cours	***Première S***

1. Trinôme du second degré

1) Définition

Définition 4 : On appelle fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) toute fonction définie sur **R**, qui peut s'écrire sous la forme : $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Exemples :

- Les fonctions suivantes, définies sur **R**, sont des trinômes du second degré :
$x \mapsto -2x^2 + x - 1$ et $x \mapsto (x+1)^3 - (x-1)^3$ (car, pour tout réel x, $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2$

- La fonction $x \mapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$.

2) Forme canonique

Soit f : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$.

Or $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}$.

Donc, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$; on l'appellera discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On obtient ainsi, $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Définition 5 : Le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$. Cette forme est appelée **forme canonique** du polynôme $ax^2 + bx + c$.
Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ **est le discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ ou de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemples :

- $2x^2 - x + 3$ a pour discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23$
- $-x^2 + 5x + 6$ a pour discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 49$
- $x^2 - 2x + 1$ a pour discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

2. Résolution d'une équation du second degré

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre l'équation $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0$ d'après ce qui précède.

Comme $a\neq 0$, on en déduit que $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0$, c'est-à-dire $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

On en vient à étudier 3 cas :

- Si $\Delta<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$; ce qui impossible.

D'où l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution dans **R**.

- Si $\Delta=0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$; ce qui entraîne que $x+\frac{b}{2a}=0$, c'est-à-dire $x=-\frac{b}{2a}$.

D'où l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une seule solution $-\frac{b}{2a}$ dans **R**.

- Si $\Delta>0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ équivaut à $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

D'où l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ dans **R**.

Théorème 1 : Soit $\Delta=b^2-4ac$

Si $\Delta<0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution dans **R**.

Si $\Delta=0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une seule solution $x_0=\frac{-b}{2a}$ dans **R**.

Si $\Delta>0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ dans **R**.

Exemples : Résoudre dans **R** les équations ci-dessous :

$6x^2-x-1=0$ (a = 6, b = – 1, c = – 1)	$x^2-3x+4=0$ (a = 1, b = – 3, c = 4)	$2x^2-12x+18=0$ (a = 2, b = – 12, c = 18)
$\Delta=(-1)^2-4\times 6\times(-1)=25$ $\Delta>0$, donc l'équation $6x^2-x-1=0$ admet deux solutions dans **R** : $x_1=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$ et $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$. D'où : $S=\left\{-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$.	$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 4=-7$ $\Delta<0$, donc l'équation $x^2-3x+4=0$ n'admet pas de solution dans **R** : D'où : $S=\varnothing$.	$\Delta=(-12)^2-4\times 2\times 18=0$ $\Delta=0$, donc l'équation $2x^2-12x+18=0$ admet une seule solution dans **R** : $x_0=\frac{12}{2\times 2}=3$. D'où : $S=\{3\}$.

Remarques :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant ; par exemple, $4x^2 - 9 = 0$, $x^2 - 2x = 0$

- Lorsque a et c sont de signes contraires $-4ac < 0$, alors $\Delta > 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solution distinctes .

- Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2, alors :

$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

Exemple d'application : résolution d'une équation du second degré lorsqu'on connaît déjà une racine :
Soit l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$; elle possède une racine évidente $x_1 = 1$. L'autre racine peut aisément se déterminer grâce à S ou P : $P = 1 \times x_2 = \frac{3}{2}$; d'où $x_2 = \frac{3}{2}$.
Il est donc inutile dans ces cas de calculer le discriminant Δ.

3. Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

Théorème 2 : Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$	Le trinôme n'a pas de racine ; il est inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.
Si $\Delta = 0$	$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; $\frac{-b}{2a}$ est appelée racine double du trinôme.
Si $\Delta > 0$	l'équation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les racines du trinôme.

Démonstration :

- Si $\Delta = 0$, c'est évident en regardant la forme canonique de $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, on a :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] = a\left(x^2 - Sx + P\right) = ax^2 - a \times \left(-\frac{b}{a}\right)x + a \times \frac{c}{a}.$$

D'où : $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$.

4. Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

Étudions le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a différent de 0.

- Si $\Delta \leq 0$, on utilise la forme canonique : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

  - Si $\Delta < 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et donc, pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

  - Si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et donc, pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a (pour $x=-\dfrac{b}{2a}$, $f(x)=0$).

• Si $\Delta>0$, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme telles que $x_1<x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	opposé de a	0	signe de a	

Théorème 3 : Le trinôme ax^2+bx+c est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.
Et en particulier, lorsque Δ < 0, le trinôme est de signe constant : celui de a.

Exemple : Résoudre dans **R** l'inéquation $f(x)<0$ avec $f(x)=2x^2+5x-3$.
$\Delta=5^2-4\times2\times(-3)=49$; comme $\Delta>0$, les solutions de l'équation $2x^2+5x-3=0$ sont alors $x_1=-3$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$.
Or $f(x)$ est du signe de a = 2 sauf entre les racines.
Par conséquent, l'ensemble des solutions est : $S=\left]-3\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$.

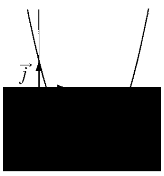
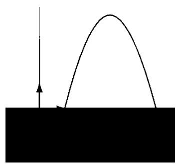
5. Étude de la fonction polynôme du second degré

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur **R** par $f(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq0$.

1) Propriété

Propriété 3 :

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur **R** par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq0$.
• La représentation graphique de f est une parabole ayant « les branches vers le haut » si $a>0$ et ayant « les branches vers le bas » si $a<0$.
• $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{\Delta}{4a}$, donc le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
• Dans un repère orthogonal, la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.

$a>0$	$a<0$
	

2) Variations de la fonction polynôme du second degré

a > 0

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f (x)		↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗	

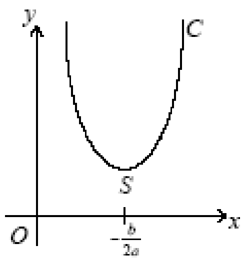
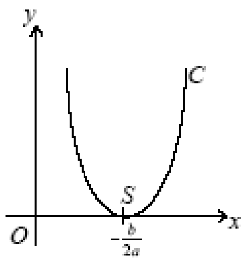
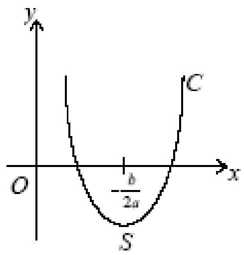
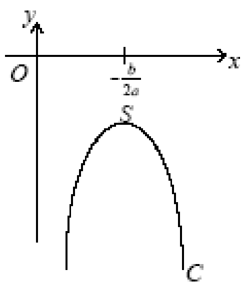
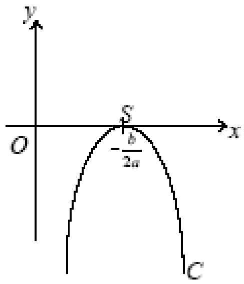
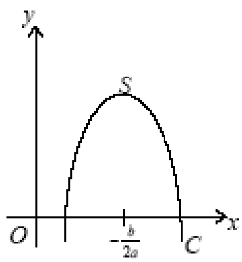
f admet **un minimum** en $-\dfrac{b}{2a}$

a < 0

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f (x)		↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘	

f admet **un maximum** en $-\dfrac{b}{2a}$

6. Résumé

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$ parabole tournée vers le haut			
$a < 0$ parabole tournée vers le bas			
	pas de racine réelle	une racine (double) : $-\dfrac{b}{2a}$	deux racines réelles x_1 et x_2 ...

Les coordonnées du sommet S de la parabole sont $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.